Natürliche Zahlen

1. **Begriffe.** Ergänze die folgende Übersicht der Grundoperationen:

Name der Operation	Addition	**Multiplikation**	**Potenzieren**
erster Operand	Summand	**Faktor**	**Basis**
zweiter Operand	**Summand**	**Faktor**	**Exponent**
Ergebnis	**Summe**	Produkt	**Potenz**
Beispiel	$2+5$	$2\cdot 5$	2^5
kommutativ?	**ja**	**ja**	**nein**
assoziativ?	**ja**	**ja**	**nein**
neutrale Zahl	0	1	1 **(Exponent)**

2. **Kommutativität.** Stelle die Additionen so um, dass Vielfache von Zehn entstehen und berechne das Ergebnis.

   (a) $11+56+48+19+22+34$

   Lösung: $(11+19)+(56+34)+(48+22)=30+90+70=190$

   (b) $55+44+38+55+46+22$

   Lösung: $(55+55)+(44+46)+(38+22)=110+90+60=260$

   (c) $19+35+16+1+24+25$

   Lösung: $(19+1)+(35+25)+(16+24)=20+60+40=120$

   (d) $47+22+24+53+28+46$

   Lösung: $(47+53)+(22+28)+(24+46)=100+50+70=220$

3. **Gausssche Summenformel.** Berechne die Summe mittels der Gaussschen Summenformel.

   (a) $1+2+3+\cdots+40$

   Lösung: $(1+40)+(2+39)+(3+38)+\cdots+(20+21)=20\cdot 41=820$

   (b) $21+22+23+\cdots+60$

Lösung: $(21+60)+(22+59)+(23+58)+\cdots+(40+41)=20\cdot 81=1620$

(c) $3+6+9+\cdots+120$

Lösung: $(3+120)+(6+117)+(9+114)+\cdots+(60+63)=20\cdot 123=2460$

(d) $15+20+25+\cdots+90$

Lösung: $(15+90)+(20+85)+(25+80)+\cdots+(50+55)=8\cdot 105=840$

4. **Verallgemeinerung.** Fasse wiederholte Operationen zu einer höheren Operation zusammen und berechne anschliessend das Ergebnis.

(a) $86+86+86+86+86$

Lösung: $5\cdot 86=10\cdot 43=430$

(b) $4+11+4+11+4+11+4+11$

Lösung: $4\cdot(4+11)=4\cdot 15=60$

(c) $2\cdot 5\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5$

Lösung: $(2\cdot 5)^3=1000$

(d) $2\cdot 3+2\cdot 3+2\cdot 3+2\cdot 3+2\cdot 3+2\cdot 3$

Lösung: $6(2\cdot 3)=6\cdot 6=36$

(e) $10^2+10^2+10^2$

Lösung: $3\cdot 10^2=3\cdot 100=300$

(f) $10^2\cdot 10^2\cdot 10^2$

Lösung: $\left(10^2\right)^3=10^{2\cdot 3}=1'000'000$

5. **Reihenfolge.** Berechne das Ergebnis. Beachte dabei die korrekte Reihenfolge der Operationen.

(a) $4+3\cdot 2=$ 10

(b) $(4+3)\cdot 2=$ 14

(c) $4\cdot 3^2=$ 36

(d) $(4\cdot 3)^2=$ 144

(e) $50(1+2)+2\cdot 3=$ 156

(f) $50\cdot 1+2+2\cdot 3=$ 58

(g) $50(1+2+2\cdot 3)=$ 450

(h) $50(1+(2+2)\cdot 3)=$ 650

6. Sonderfälle. Berechne das Ergebnis.

(a) $123'456'789 + 0 =$ $123'456'789$

(b) $123'456'789 \cdot 0 =$ 0

(c) $123'456'789 \cdot 1 =$ $123'456'789$

(d) $123'456'789^0 =$ 1

(e) $123'456'789^1 =$ $123'456'789$

(f) $1^{123'456'789} =$ 1

7. Sprache.

(a) Übersetze $(2 + 5) \cdot 4 = 28$ in die deutsche Sprache.

Lösung: Es sind verschiedene Formulierungen möglich, beispielsweise:

- «Das Produkt der Summe von Zwei und Fünf und der Zahl Vier ist gleich Achtundzwanzig.»
- «Wenn die Summe von Zwei und Fünf mit Vier multipliziert wird, ergibt sich Achtundzwanzig.»

(b) Übersetze die folgende Rechenvorschrift in mathematische Schreibweise und berechne das Ergebnis: «Berechne die dritte Potenz der Summe von Vier und Sechs».

Lösung: $(4 + 6)^3 = 10^3 = 1000$

(c) Wie heisst das mathematische Gesetz $a \cdot b = b \cdot a$? Formuliere es in deutscher Sprache.

Lösung: Es sind verschiedene Formulierungen möglich, beispielsweise:

Es ist das Kommutativgesetz der Multiplikation. Es besagt, dass das Ergebnis einer Multiplikation gleich bleibt, wenn die Reihenfolge der Faktoren vertauscht wird.

8. Nullprodukt. «Das Produkt zweier Zahlen ist gleich Null.»

(a) Drücke diese Aussage als mathematische Formel aus.

Lösung: $a \cdot b = 0$

(b) Gib Zahlenbeispiele an, für welche diese Aussage korrekt ist.

Lösung:

$5 \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 20 = 0$ $0 \cdot 0 = 0$

(c) Zu diesem Sachverhalt gibt es ein wichtiges mathematisches Gesetz. Ergänze die fehlenden Begriffe.

Gesetz vom Nullprodukt. Das Produkt zweier Zahlen ist genau dann gleich **Null**, wenn mindestens einer der **Faktoren** gleich Null ist.

9. Produkt und Summe. «Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist kleiner als deren Summe.»

(a) Drücke diese Aussage als mathematische Formel aus.

Lösung: $a \cdot b < a + b$

(b) Gib Zahlenbeispiele an, für welche diese Aussage korrekt ist.

Lösung:

$5 \cdot 0 < 5 + 0$ $1 \cdot 20 < 1 + 20$ $1 \cdot 0 < 1 + 0$

Achtung, nicht korrekt für $0 \cdot 0 = 0 + 0$.

(c) Versuche, zu dieser Aussage ein allgemeingültiges Gesetz zu formulieren.

Lösung: Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist genau dann kleiner als deren Summe, wenn mindestens eine der Zahlen kleiner als Zwei ist und nicht beide gleich Null sind.

10. Aussagen. Kreuze jeweils die korrekte Antwort an.

(a) Wie verändert sich ein Produkt, wenn ein Faktor verdoppelt wird?

◯ bleibt gleich √ **verdoppelt sich** ◯ vervierfacht sich ◯ halbiert sich

(b) Wie verändert sich ein Produkt, wenn zwei Faktoren verdoppelt werden?

◯ bleibt gleich ◯ verdoppelt sich √ **vervierfacht sich** ◯ halbiert sich

(c) Wie verändert sich eine Summe, wenn alle Summanden verdoppelt werden?

◯ bleibt gleich √ **verdoppelt sich** ◯ vervierfacht sich ◯ halbiert sich