Teilbarkeit und Primzahlen

1. **Begriffe.** Ergänze die folgende Übersicht der Umkehroperationen:

Name der Operation	Subtraktion	**Division**
erster Operand	**Minuend**	**Dividend**
zweiter Operand	**Subtrahend**	**Divisor**
Ergebnis	**Differenz**	Quotient
Beispiel	$5-2$	$5:2$
kommutativ?	**nein**	**nein**
assoziativ?	**nein**	**nein**
Abgeschlossenheit	**in $\mathbb{Z}$**	**bisher nicht**

2. **Teilbarkeit.** Mache dort ein Häkchen, wo die Teilbarkeit gegeben ist.

	324	495	693	792	1539	2912	4125	6264	9075
teilbar durch 2	✓			✓		✓		✓	
teilbar durch 3	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓
teilbar durch 4	✓			✓		✓		✓	
teilbar durch 5		✓					✓		✓
teilbar durch 6	✓			✓				✓	
teilbar durch 8				✓		✓		✓	
teilbar durch 9	✓	✓	✓	✓	✓			✓	

3. **Teilermenge.** Wie lautet T_{30}, also die Teilermenge von Dreissig?

Lösung:

$$T_{30} = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 10;\ 15;\ 30\}$$

4. **Primfaktorzerlegung.** Wie lautet die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen?
   (a) $51 = 3 \cdot 17$
   (b) $55 = 5 \cdot 11$
   (c) $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$

(d) $76 = 2 \cdot 2 \cdot 19$

(e) $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

(f) $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

(g) $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

(h) $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

5. Primfaktoren. Wie lautet die Primfaktorzerlegung von 304'000?

Lösung:

$$\begin{aligned} 304000 &= 304 \cdot 1000 = (2 \cdot 152)(10 \cdot 10 \cdot 10) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 76)(2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 38)(2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19)(2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5) = \boxed{2^7 \cdot 5^3 \cdot 19} \end{aligned}$$

6. Grösster gemeinsamer Teiler. Bestimme den ggT mittels der Primfaktorzerlegung.

(a) $\mathrm{ggT}(90, 72)$

Lösung:

$90 =$	2				$\cdot$	3	$\cdot$	3	$\cdot$	5	
$72 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	3	$\cdot$	3		
$\mathrm{ggT}(90, 72) =$	2				$\cdot$	3	$\cdot$	3			$= 18$

(b) $\mathrm{ggT}(160, 112)$

Lösung:

$160 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	5	
$112 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2			$\cdot$	7	
$\mathrm{ggT}(160, 112) =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2					$= 16$

(c) $\mathrm{ggT}(88, 143)$

Lösung:

$88 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	11		
$143 =$						11	$\cdot$	13	
$\mathrm{ggT}(88, 143) =$						11			$= 11$

(d) $\mathrm{ggT}(450, 375)$

Lösung:

$450 =$	2	$\cdot$	3	$\cdot$	3	$\cdot$	5	$\cdot$	5			
$375 =$			3			$\cdot$	5	$\cdot$	5	$\cdot$	5	
$\mathrm{ggT}(450, 375) =$			3			$\cdot$	5	$\cdot$	5			$= 75$

(e) $\mathrm{ggT}(165, 210)$

Lösung:

$165 =$			3	$\cdot$	5			$\cdot$	11	
$210 =$	2	$\cdot$	3	$\cdot$	5	$\cdot$	7			
$\mathrm{ggT}(165, 210) =$			3	$\cdot$	5					$= 15$

(f) $\mathrm{ggT}(126, 84)$

Lösung:

$126 =$	2			$\cdot$	3	$\cdot$	3	$\cdot$	7	
$84 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	3			$\cdot$	7	
$\mathrm{ggT}(126, 84) =$	2			$\cdot$	3			$\cdot$	7	$= 42$

(g) $\mathrm{ggT}(340, 442)$

Lösung:

$340 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	5			$\cdot$	17	
$442 =$	2					$\cdot$	13	$\cdot$	17	
$\mathrm{ggT}(340, 442) =$	2							$\cdot$	17	$= 34$

7. Kleinstes gemeinsames Vielfaches. Bestimme das kgV mittels der Primfaktorzerlegung.

(a) $\mathrm{kgV}(8, 12)$

Lösung:

$8 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2			
$12 =$	2	$\cdot$	2			$\cdot$	3	
$\mathrm{kgV}(8, 12) =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	3	$= 24$

(b) $\mathrm{kgV}(11, 9)$

Lösung:

$11 =$					$\cdot$	11
$9 =$	3	$\cdot$	3			
$\mathrm{kgV}(11, 9) =$	3	$\cdot$	3	$\cdot$	11	$= 99$

(c) $\mathrm{kgV}(36, 45)$

Lösung:

$36 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	3	$\cdot$	3				
$45 =$					3	$\cdot$	3	$\cdot$	5		
$\mathrm{kgV}(36, 45) =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	3	$\cdot$	3	$\cdot$	5	$= 180$	

(d) $\mathrm{kgV}(25, 40)$

Lösung:

$25 =$						$\cdot$	5	$\cdot$	5		
$40 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	5				
$\mathrm{kgV}(25, 40) =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	5	$\cdot$	5	$= 200$	

(e) $\mathrm{kgV}(24, 350)$

Lösung:

$24 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	3						
$350 =$	2							$\cdot$	5	$\cdot$	5	$\cdot$	7
$\mathrm{kgV}(24, 350) =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	3	$\cdot$	5	$\cdot$	5	$\cdot$	7	$= 4200$

(f) $\mathrm{kgV}(25, 350)$

Lösung:

$25 =$			5	$\cdot$	5			
$350 =$	2	$\cdot$	5	$\cdot$	5	$\cdot$	7	
$\mathrm{kgV}(25, 350) =$	2	$\cdot$	5	$\cdot$	5	$\cdot$	7	$= 350$

(g) $\mathrm{kgV}(26, 350)$

Lösung:

$26 =$	2						$\cdot$	13		
$350 =$	2	$\cdot$	5	$\cdot$	5	$\cdot$	7			
$\mathrm{kgV}(26, 350) =$	2	$\cdot$	5	$\cdot$	5	$\cdot$	7	$\cdot$	13	$= 4550$

8. **Stammtisch.** Sieben Menschen haben in der Dorfbeiz ihren Stammtisch. Adriano kommt jeden Tag, Bruna jeden zweiten Tag, Charles jeden dritten, Daria jeden vierten, Emil jeden fünften, Fanny jeden sechsten und Gustav jeden siebten Tag. Heute sind sie alle beisammen und stossen auf ein lang ersehntes Wiedersehen in der vollständigen Gruppe an. In wie vielen Tagen werden sie das nächste Mal darauf anstossen können?

Lösung: Dazu wird das kgV der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 benötigt.

$$\text{kgV}(1,2,3,4,5,6,7) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

Die sieben Menschen treffen sich also erst wieder in 420 Tagen alle gemeinsam.

9. **Primzahl.** Ist Eins eine Primzahl oder nicht? Begründe deine Antwort.

Lösung: Eins ist keine Primzahl. Eine Primzahl hat genau zwei Teiler. Die Zahl Eins hat aber nur einen Teiler, sich selbst. Somit ist sie gemäss Definition keine Primzahl.

10. **Gruppengrösse.** Lehrpersonen unterrichten gerne Klassen mit 24 Schüler:innen, da sie in solchen Klassen Gruppen in vielen unterschiedlichen Grössen bilden können. Welche und wie viele unterschiedliche Gruppengrössen können aus 24 Schüler:innen ohne Rest gebildet werden?

Lösung: Wir bestimmen die Teilermenge T_{24}.

$$T_{24} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12;\ 24\}$$

Da einzelne Schüler:innen und die ganze Klasse nicht als Gruppen bezeichnet werden können, werden diese zwei ausgeschlossen.

Antwort: Es können 2er-, 3er-, 4er-, 6er-, 8er- und 12er-Gruppen gebildet werden. Das sind insgesamt sechs verschiedene Gruppengrössen.