Gleichungen

1. **Lösungsmenge.** Gib zu den folgenden Gleichungen jeweils die Lösungsmenge L für die vorgegebene Definitionsmenge D an.

Gleichung	$D = \mathbb{N}$	$D = \mathbb{Z}$
$x = -5$	$L = \{\}$	$L = \{-5\}$
$x = 0$	$L = \{0\}$	$L = \{0\}$
$2x = 1$	$L = \{\}$	$L = \{\}$
$x = x$	$L = \mathbb{N}$	$L = \mathbb{Z}$
$x = x + 1$	$L = \{\}$	$L = \{\}$
$2x = x$	$L = \{0\}$	$L = \{0\}$
$x^2 = 4$	$L = \{2\}$	$L = \{-2;\ 2\}$
$x^2 = 2$	$L = \{\}$	$L = \{\}$
$x^2 = -1$	$L = \{\}$	$L = \{\}$

2. **Einfache Gleichungen.** Löse die folgenden Gleichungen schrittweise nach x auf. Gib bei jedem Schritt an, was für eine Art Äquivalenzumformung du verwendest.
   - Addition/Subtraktion eines Terms, z.B. $-2x$.
   - Multiplikation mit oder Division durch eine Zahl, z.B. $:3$.
   - Art einer Termumformung, z.B. «Distributivgesetz».

   Gib am Schluss die Lösungsmenge der Gleichung an.

   Beispiel. $5(x-3) = 2x + 3$

   $$\begin{array}{rl|l} 5(x-3) &= 2x+3 & \textit{Distributivgesetz} \\ 5x - 15 &= 2x+3 & -2x \\ 3x - 15 &= 3 & +15 \\ 3x &= 18 & :3 \\ x &= 6 & \end{array}$$

   Die Lösungsmenge ist $L = \{6\}$.

   (a) $8x = 24$

   Lösung:

   $$\begin{array}{rl|l} 8x &= 24 & :8 \\ x &= 3 & \end{array}$$

   Die Lösungsmenge ist $L = \{3\}$.

(b) $-4x = 8$

Lösung:

$$\begin{array}{rl|l} -4x &= 8 & \cdot(-1) \\ 4x &= -8 & :4 \\ x &= -2 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{-2\}$.

(c) $-12x - 8 = -2x - 9$

Lösung:

$$\begin{array}{rl|l} -12x - 8 &= -2x - 9 & +12x \\ -8 &= 10x - 9 & +9 \\ 1 &= 10x & \end{array}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung in den ganzen Zahlen. Die Lösungsmenge ist $L = \{\}$.

(d) $(x-2)^2 = x(x-4) + 4$

Lösung:

$$\begin{array}{rl|l} (x-2)^2 &= x(x-4)+4 & \text{erste binomische Formel} \\ x^2 - 4x + 4 &= x(x-4)+4 & \text{ausmultiplizieren} \\ x^2 - 4x + 4 &= x^2 - 4x + 4 & -x^2 \\ -4x + 4 &= -4x + 4 & +4x \\ 4 &= 4 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \mathbb{Z}$.

(e) $5x(x-1) - (2x+3)^2 - (x-5)(x+3) - 6 = 0$

Lösung:

$$\begin{array}{rl|l} 5x(x-1) - (2x+3)^2 - (x-5)(x+3) - 6 &= 0 & \text{ausmultiplizieren} \\ 5x^2 - 5x - \left(4x^2 + 12x + 9\right) - \left(x^2 - 2x - 15\right) - 6 &= 0 & \text{Klammern auflösen} \\ 5x^2 - 5x - 4x^2 - 12x - 9 - x^2 + 2x + 15 - 6 &= 0 & \text{zusammenfassen} \\ -15x &= 0 & :(-15) \\ x &= 0 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{0\}$.

3. Einfache lineare Gleichungen.

(a) $5 - x = 25 + 3x - 4$

Lösung:

$$\begin{aligned} 5 - x &= 25 + 3x - 4 && \text{zusammenfassen} \\ 5 - x &= 21 + 3x && +x - 21 \\ 5 - x + x - 21 &= 21 + 3x + x - 21 && \text{zusammenfassen} \\ -16 &= 4x && :4 \\ -4 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{-4\}$.

(b) $16 + 2x = 56 - 8x - 20$

Lösung:

$$\begin{aligned} 16 + 2x &= 56 - 8x - 20 && \text{zusammenfassen} \\ 16 + 2x &= 36 - 8x && +8x - 16 \\ 16 + 2x + 8x - 16 &= 36 - 8x + 8x - 16 && \text{zusammenfassen} \\ 10x &= 20 && :10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{2\}$.

(c) $2x - 22 - 9x = 42 + 11x - 100$

Lösung:

$$\begin{aligned} 2x - 22 - 9x &= 42 + 11x - 100 && \text{zusammenfassen} \\ -7x - 22 &= 11x - 58 && +7x + 58 \\ -7x - 22 + 7x + 58 &= 11x - 58 + 7x + 58 && \text{zusammenfassen} \\ 36 &= 18x && :18 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{2\}$.

(d) $19x - 32 + 17x = 18x - 30 + 16x - 3$

Lösung:

$$\begin{aligned} 19x - 32 + 17x &= 18x - 30 + 16x - 3 && \text{zusammenfassen} \\ 36x - 32 &= 34x - 33 && +32 - 34x \\ 36x - 32 + 32 - 34x &= 34x - 33 + 32 - 34x && \text{zusammenfassen} \\ 2x &= -1 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung in den ganzen Zahlen. Die Lösungsmenge ist $L = \{\}$.

4. Lineare Gleichungen mit einfachen Klammern.

(a) $0 = 8x - (4x + 12)$

Lösung:

$0 = 8x - (4x + 12)$	Klammer auflösen
$0 = 8x - 4x - 12$	zusammenfassen
$0 = 4x - 12$	$+ 12$
$0 + 12 = 4x - 12 + 12$	zusammenfassen
$12 = 4x$	$: 4$
$3 = x$	

Die Lösungsmenge ist $L = \{3\}$.

(b) $7x - 10 = 15 - (x - 14)$

Lösung:

$7x - 10 = 15 - (x - 14)$	Klammer auflösen
$7x - 10 = 15 - x + 14$	zusammenfassen
$7x - 10 = 29 - x$	$+ x + 10$
$7x - 10 + x + 10 = 29 - x + x + 10$	zusammenfassen
$8x = 39$	

Diese Gleichung hat keine Lösung in den ganzen Zahlen. Die Lösungsmenge ist $L = \{\}$.

(c) $7(x + 1) = 6(x - 1)$

Lösung:

$7(x + 1) = 6(x - 1)$	ausmultiplizieren
$7x + 7 = 6x - 6$	$- 6x - 7$
$7x + 7 - 6x - 7 = 6x - 6 - 6x - 7$	zusammenfassen
$x = -13$	

Die Lösungsmenge ist $L = \{-13\}$.

(d) $57 - 2(x + 21) = 63 - 2(3x + 4)$

Lösung:

$57 - 2(x + 21) = 63 - 2(3x + 4)$	ausmultiplizieren
$57 - 2x - 42 = 63 - 6x - 8$	zusammenfassen
$15 - 2x = 55 - 6x$	$+ 6x - 15$
$15 - 2x + 6x - 15 = 55 - 6x + 6x - 15$	zusammenfassen
$4x = 40$	$: 4$
$x = 10$	

Die Lösungsmenge ist $L = \{10\}$.

(e) $5(x + 7) + 2(x + 7) - 4(x + 7) = 3$

Lösung:

$$\begin{aligned} 5(x+7)+2(x+7)-4(x+7) &= 3 && \text{ausklammern!}\\ (5+2-4)(x+7) &= 3 && \text{zusammenfassen}\\ 3(x+7) &= 3 && :3\\ x+7 &= 1 && -7\\ x &= -6 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{-6\}$.

(f) $15 - 3(2x-1) = 16(x+1) - 2(x-1)$

Lösung:

$$\begin{aligned} 15-3(2x-1) &= 16(x+1)-2(x-1) && \text{ausmultiplizieren}\\ 15-6x+3 &= 16x+16-2x+2 && \text{zusammenfassen}\\ 18-6x &= 14x+18 && +6x-18\\ 18-6x+6x-18 &= 14x+18+6x-18 && \text{zusammenfassen}\\ 0 &= 20x && :20\\ 0 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{0\}$.

5. Lineare Gleichungen mit Produkten von Klammern.

(a) $(x+1)(x+7) = (x+2)(x+3)$

Lösung:

$$\begin{aligned} (x+1)(x+7) &= (x+2)(x+3) && \text{ausmultiplizieren}\\ x^2+8x+7 &= x^2+5x+6 && -x^2-5x-7\\ 3x &= -1 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung in den ganzen Zahlen. Die Lösungsmenge ist $L = \{\}$.

(b) $2(x+2)(x+5) = (2x+7)(x+3)$

Lösung:

$$\begin{aligned} 2(x+2)(x+5) &= (2x+7)(x+3) && \text{ausmultiplizieren}\\ 2\left(x^2+7x+10\right) &= 2x^2+6x+7x+21 && \text{ausmultiplizieren}\\ 2x^2+14x+20 &= 2x^2+13x+21 && -2x^2-13x-20\\ x &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{1\}$.

(c) $2x^2 - (x+3)(x-3) = (x+1)^2$

Lösung:

$$\begin{aligned} 2x^2 - (x+3)(x-3) &= (x+1)^2 && \text{ausmultiplizieren (Binome)} \\ 2x^2 - \left(x^2 - 9\right) &= x^2 + 2x + 1 && \text{Klammer auflösen} \\ 2x^2 - x^2 + 9 &= x^2 + 2x + 1 && \text{zusammenfassen} \\ x^2 + 9 &= x^2 + 2x + 1 && -x^2 - 1 \\ 8 &= 2x && :2 \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{4\}$.

(d) $(x+3)(x-5) = (x-3)^2$

Lösung:

$$\begin{aligned} (x+3)(x-5) &= (x-3)^2 && \text{ausmultiplizieren} \\ x^2 - 2x - 15 &= x^2 - 6x + 9 && -x^2 + 15 + 6x \\ 4x &= 24 && :4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{6\}$.

6. **Bauernhof.** Du kommst an einem Bauernhof vorbei. Die Bäuerin sagt dir, dass sie drei Mal so viele Hühner wie Kühe hat. Insgesamt zählst du 250 Beine. Wie viele Kühe gibt es auf dem Bauernhof?

Lösung: Die Anzahl Kühe wird mit k bezeichnet. Jede Kuh hat 4 Beine, und jedes Huhn hat 2 Beine.

$$\begin{aligned} k \cdot 4 + 3k \cdot 2 &= 250 && \text{zusammenfassen} \\ 10k &= 250 && :10 \\ k &= 25 \end{aligned}$$

Es gibt 25 Kühe auf dem Bauernhof.

7. **Rechteck.** Die Länge a eines Rechtecks ist viermal so gross wie die Breite b. Wenn die Breite um 5 cm verlängert und die Länge um 10 cm verkürzt wird, so vergrössert sich die Fläche um 200 cm^2. Wie lang und breit ist das ursprüngliche Rechteck?

Lösung: Die Länge des ursprünglichen Rechtecks kann durch die Breite ausgedrückt werden:

$$a = 4b$$

Die Fläche F_1 des ursprünglichen Rechtecks ist:

$$F_1 = ab$$

Die Fläche F_2 des neuen Rechtecks beträgt:

$$F_2 = (a-10)(b+5)$$

Die Fläche des neuen Rechtecks ist um 200 cm^2 grösser:

$$\begin{aligned} F_1 + 200 &= F_2 && \mid\ F_1 \text{ und } F_2 \text{ ersetzen} \\ ab + 200 &= (a-10)(b+5) && \mid\ a = 4b \\ 4bb + 200 &= (4b-10)(b+5) && \mid\ \text{ausmultiplizieren} \\ 4b^2 + 200 &= 4b^2 - 10b + 20b - 50 && \mid\ -4b^2 \\ 200 &= -10b + 20b - 50 && \mid\ +50 \\ 250 &= -10b + 20b && \mid\ \text{zusammenfassen} \\ 250 &= 10b && \mid\ :10 \\ 25 &= b \end{aligned}$$

Die Breite des ursprünglichen Rechtecks beträgt 25 cm, seine Länge 100 cm.

8. **Welche Zahl.** Zwei natürliche Zahlen haben eine Differenz von drei. Ihre Quadrate haben eine Differenz von 381. Wie lautet die kleinere der beiden Zahlen?

Lösung:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 - x^2 &= 381 && \mid\ \text{ausmultiplizieren} \\ x^2 + 6x + 9 - x^2 &= 381 && \mid\ \text{zusammenfassen} \\ 6x + 9 &= 381 && \mid\ -9 \\ 6x &= 372 && \mid\ :6 \\ x &= 62 \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist 62.

9. **Welche Zahl.** Wird zu einer Zahl sechs addiert und anschliessend rechts die Ziffer 4 angefügt, so entsteht das Zwölffache der Zahl.

Lösung: Rechts die Ziffer 4 anfügen bedeutet, dass die Zahl zunächst mit 10 multipliziert wird und anschliessend 4 addiert wird. Beispiel:

$$58 \quad \longrightarrow \quad 584 = 58 \cdot 10 + 4$$

Die Gleichung lautet somit:

$$\begin{aligned} 10(x+6) + 4 &= 12x && \mid\ \text{ausmultiplizieren} \\ 10x + 60 + 4 &= 12x && \mid\ \text{zusammenfassen} \\ 10x + 64 &= 12x && \mid\ -10x \\ 64 &= 2x && \mid\ :2 \\ 32 &= x \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist 32. Kontrolle:

$$32 \xrightarrow{+6} 38 \xrightarrow{4 \text{ anfügen}} 384 = 12 \cdot 32$$

10. Welche Zahl. Werden auf der rechten Seite einer Zahl die Ziffern 72 angefügt, so entsteht das 102-Fache der Zahl.

Lösung:

$$\begin{array}{rl|l} 100x + 72 = 102x & & -100x \\ 72 = 2x & & :2 \\ 36 = x & & \end{array}$$

Die gesuchte Zahl ist 36. Kontrolle:

$$36 \xrightarrow{72 \text{ anfügen}} 3672 = 102 \cdot 36$$

11. Fünf Zahlen. Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen der Viererreihe beträgt 420. Wie lautet die kleinste dieser Zahlen?

Lösung:

$$\begin{array}{rl|l} x + (x+4) + (x+8) + (x+12) + (x+16) = 420 & & \text{zusammenfassen} \\ 5x + 40 = 420 & & -40 \\ 5x = 380 & & :5 \\ x = 76 & & \end{array}$$

Die kleinste dieser Zahlen lautet 76.

12. Alter. 🏆 Maria ist heute 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt wie Anna war, als Maria so alt war wie Anna jetzt ist. Wie alt ist Anna heute?

Lösung:

13. Party. 🏆 An einer Party stossen alle miteinander an. Da fünf Gäste unangemeldet gekommen sind, hört man die Gläser 110 Mal mehr als ursprünglich erklingen. Wie viele Gäste nahmen insgesamt an der Party teil?

Lösung: