Merkblatt Ganze Zahlen

Zahlenmengen

Begriff	**Symbol**	**Menge**
leere Menge	$\{\}$	$\{\}$
natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$\{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
positive ganze Zahlen	$\mathbb{Z}^+$	$\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
nichtnegative ganze Zahlen	$\mathbb{Z}_0^+$	$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\} = \mathbb{N}$
negative ganze Zahlen	$\mathbb{Z}^-$	$\{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1\}$
nichtpositive ganze Zahlen	$\mathbb{Z}_0^-$	$\{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0\}$

Grundoperationen

Addition / Summe

3	$+$	2	$=$	5
Drei	plus	Zwei	ist gleich	Fünf.
Die Summe von				
Drei	und	Zwei	ist gleich	Fünf.

- Summanden 3 und 2 werden addiert.
- kommutativ und assoziativ
- neutrale Zahl 0
- abgeschlossen in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$

Multiplikation / Produkt

3	$\cdot$	2	$=$	6
Drei	mal	Zwei	ist gleich	Sechs.
Das Produkt von				
Drei	und	Zwei	ist gleich	Sechs.

- Faktoren 3 und 2 werden multipliziert.
- kommutativ und assoziativ
- neutrale Zahl 1
- abgeschlossen in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$

Subtraktion / Differenz

5	$-$	2	$=$	3
Fünf	minus	Zwei	ist gleich	Drei.
Die Differenz von				
Fünf	und	Zwei	ist gleich	Drei.

- Subtrahend 2 wird vom Minuend 5 subtrahiert.
- weder kommutativ noch assoziativ
- abgeschlossen in $\mathbb{Z}$

Division / Quotient

6	$:$	2	$=$	3
Sechs	durch	Zwei	ist gleich	Drei.
Der Quotient von				
Sechs	und	Zwei	ist gleich	Drei.

- Dividend 6 wird durch Divisor 2 geteilt.
- weder kommutativ noch assoziativ
- nicht abgeschlossen in $\mathbb{Z}$

Potenzieren

Potenzieren / Potenz

2	^{3}	$=$	8
Zwei	hoch Drei	ist gleich	Acht.
Die dritte Potenz von			
Zwei		ist gleich	Acht.

- Basis 2 wird um den Exponenten 3 potenziert.
- weder kommutativ noch assoziativ
- Abgeschlossen in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$

Quadrieren / Quadrat

3	^{2}	$=$	9
Drei	im Quadrat	ist gleich	Neun.
Das Quadrat von			
Drei		ist gleich	Neun.

- Speziallfall Potenz mit Exponent 2.
- Basis 3 wird quadriert.

Negative Zahlen

Gegenzahl $-a$

«Ergänzung zu Null bei einer Summe.»

$$a + (-a) = 0 \qquad 5 + (-5) = 0$$

Betrag $|a|$

«Positiver Wert einer Zahl.»

$$|5| = 5 \qquad |-5| = 5$$

Die Gegenzahl $-a$ einer positiven Zahl a ist eine negative Zahl. Die Gegenzahl $-b$ einer negativen Zahl b ist eine positive Zahl.

Rechengesetze 1

Kommutativgesetze	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze	$a + b + c = a + (b + c)$	$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Neutrale Zahl	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Rechengesetze 2: Gegenzahlen

Gegen-Gegenzahl	$-(-a) = a$	
Addition/Subtraktion	$a + (-b) = a - b$	$a - (-b) = a + b$
Klammern auflösen	$a - (b + c) = a - b - c$	$a - (b - c) = a - b + c$
Multiplikation	$(-a) \cdot b = -a \cdot b$	$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Rechengesetze 3: Faktorisieren

Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Erste binomische Formel	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Zweite binomische Formel	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Dritte binomische Formel	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Doppelklammer	$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Teilbarkeit, Teiler, Primzahlen

a ist **teilbar** durch t, wenn $a : t = z$ eine ganze Zahl ergibt. t ist dann ein **Teiler** von a, t **teilt** a. Die **Teilermenge** T_n ist die Menge aller Teiler der Zahl n:

$$T_{12} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$$

Teilbarkeitsregeln

Divisor	Regel für Dividend
2	letzte Ziffer ist gerade
3	Quersumme ist durch 3 teilbar
4	letzte zwei Ziffern sind durch 4 teilbar
5	letzte Ziffer ist 0 oder 5
6	ist durch 2 und 3 teilbar
7	letzte Ziffer verdoppelt und vom Rest der Zahl subtrahiert ist durch 7 teilbar
8	letzte drei Ziffern sind durch 8 teilbar
9	Quersumme ist durch 9 teilbar
10	letzte Ziffer ist 0

Eine **Primzahl** hat genau zwei Teiler. Jede Zahl kann eindeutig in **Primfaktoren** zerlegt werden:

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\qquad$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Grösster gemeinsamer Teiler (ggT)

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$\text{ggT}(12, 30) = 2 \cdot 3 = 6$$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$\text{kgV}(12, 30) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Gleichungen und Ungleichungen

A ist kleiner als B	$A < B$	A ist grösser als oder gleich B	$A \geq B$
A ist kleiner als oder gleich B	$A \leq B$	A ist grösser als B	$A > B$
A ist gleich B	$A = B$	A ist nicht gleich B	$A \neq B$

Folgende **Äquivalenzumformungen** dürfen an allen Gleichungen und Ungleichungen vorgenommen werden:

Termumformungen

$$\begin{aligned} 4(x-3) &= x+3 \\ 4x-12 &= x+3 \end{aligned} \quad \Big| \quad \text{links ausmultiplizieren}$$

auf beiden Seiten gleichen Term addieren oder subtrahieren

$$\begin{aligned} 4x-12 &= x+3 \\ 4x-12\color{red}{-x+12} &= x+3\color{red}{-x+12} \\ 3x &= 15 \end{aligned} \quad \Big| \quad -x+12$$

beide Seiten mit gleicher positiver Zahl multiplizieren

$$\begin{aligned} 4x-12 &= x+3 \\ (4x-12)\color{red}{\cdot 2} &= (x+3)\color{red}{\cdot 2} \\ 8x-24 &= 2x+6 \end{aligned} \quad \Big| \quad \cdot 2$$

beide Seiten durch gleiche positive Zahl dividieren

$$\begin{aligned} 8x-24 &= 2x+6 \\ (4x-12)\color{red}{:2} &= (x+3)\color{red}{:2} \\ 4x-12 &= x+3 \end{aligned} \quad \Big| \quad :2$$

Folgende **Äquivalenzumformungen mit Zeichentausch** dürfen an allen Gleichungen und Ungleichungen vorgenommen werden, falls das Ungleichheitszeichen umgedreht wird.

- beide Seiten vertauschen
- beide Seiten mit gleicher negativer Zahl multiplizieren
- beide Seiten durch gleiche negative Zahl dividieren