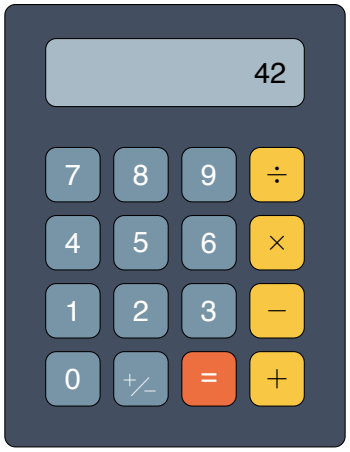
# Ganze Zahlen

Stefan Rothe

01.09.2026




## Inhaltsverzeichnis

1 Natürliche Zahlen . . . 2
2 Addition . . . 3
3 Multiplikation . . . 5
4 Potenz . . . 7
5 Subtraktion . . . 8
6 Ganze Zahlen . . . 9
7 Division, Teilbarkeit und Primzahlen . . . 12
8 Terme . . . 15
9 Faktorisieren und Ausmultiplizieren . . . 17
10 Gleichungen . . . 19

*© Gymnasium Kirchenfeld*
*Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.*
*(CC BY 4.0)*

# 1 Natürliche Zahlen

## 1.1 Zahlenmengen

Eine Ansammlung von Zahlen wird als **Zahlenmenge** bezeichnet. Die Zahlen der Mengen werden in geschweiften Klammern aufgezählt. Die **leere Menge** $\{\}$ enthält keine Zahlen. Zahlenmengen werden mit Grossbuchstaben oder speziellen Symbolen abgekürzt.

***Beispiel.*** *Einige Mengen und deren mathematische Darstellung:*

| | |
|---|---|
| *Menge aller Ziffern* | $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$ |
| *Menge mit der Zahl Null* | $\{0\}$ |
| *Leere Menge* | $\{\}$ |
| *Menge der geraden natürlichen Zahlen* | $\{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ \ldots\}$ |

**Achtung:** Eine Menge ist nicht dasselbe wie eine Zahl: $0 \neq \{0\}$

## 1.2 Definition

Die natürlichen Zahlen ergeben sich, indem Dinge gezählt werden.

***Beispiel.*** *Ich kann keinen, einen, fünf oder zehn Millionen Äpfel besitzen. Jede Anzahl Äpfel, die ich besitze, kann als natürliche Zahl dargestellt werden:*

$$0 \qquad 1 \qquad 5 \qquad 10'000'000$$

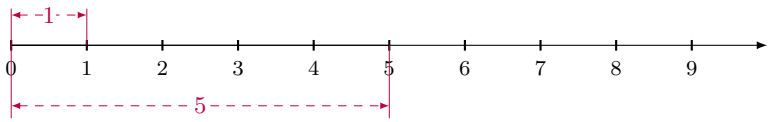
Die **Menge der natürlichen Zahlen** wird mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnet. Null ist eine natürliche Zahl.

$$\mathbb{N} := \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$$

Je nach Definition wird Null nicht zu den natürlichen Zahlen gezählt. Wir sprechen in diesem Fall von den **positiven** natürlichen Zahlen und bezeichnen diese mit dem Symbol $\mathbb{N}^+$.

## 1.3 Geometrische Interpretation

Die natürlichen Zahlen können auf dem sogenannten **Zahlenstrahl** dargestellt werden. Dabei ist der Punkt $0$ (die Null) der Ausgangspunkt oder **Ursprung**. Der Abstand zwischen $0$ und $1$ (der Eins) ist die **Einheit**, also die Länge $1$.




Nun kann eine beliebige natürliche Zahl $n$ dargestellt werden, indem die $n$-fache Länge der Einheit auf dem Zahlenstrahl abgemessen wird. So ist die Zahl $5$ das fünffache der Einheitsdistanz vom Ursprung entfernt.

# 2 Addition

## 2.1 Definition

Die Addition bildet das Zusammenfassen von zählbaren Dingen ab.

***Beispiel.*** *Wenn ich fünf Äpfel besitze und drei zusätzlich kaufe, habe ich nun acht Äpfel:*

$$3 + 5 = 8$$

## 2.2 Schreib- und Sprechweise

Die beiden Zahlen $a$ und $b$, welche addiert werden, heissen **Summanden**, das Ergebnis $c$ heisst **Summe**.

Für die Addition wird das Operationszeichen $+$ verwendet. Wir schreiben

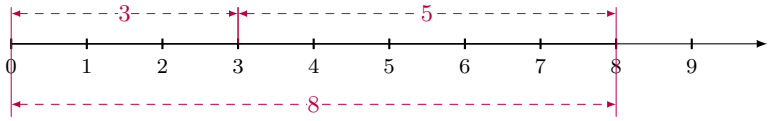
$$a + b = c$$

und sagen «$a$ plus $b$ ist gleich $c$.» oder «Die Summe von $a$ und $b$ ist gleich $c$.»

***Beispiel.*** *Die Summe von Drei und Fünf ist gleich Acht:* $3 + 5 = 8$

## 2.3 Geometrische Interpretation

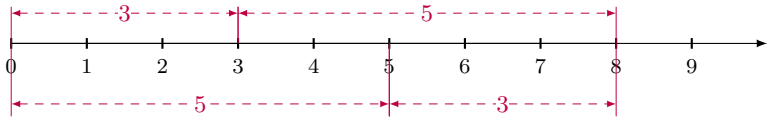
Geometrisch gesehen ist eine Addition das Aneinanderhängen zweier Längen.




So bedeutet $3 + 5$, dass die Distanz $5$ an die Distanz $3$ angehängt wird. Dabei wird der Punkt $8$ erreicht, also $3 + 5 = 8$.

## 2.4 Kommutativgesetz

Anhand der geometrischen Interpretation der Addition ist ersichtlich, dass es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge die Summanden stehen. Wenn an die Länge $5$ die Länge $3$ angehängt wird, wird der gleiche Ort erreicht wie wenn an die Länge $3$ die Länge $5$ angehängt wird.




**Kommutativgesetz.** Die Summanden einer Addition können vertauscht werden, ohne dass sich der Wert der Summe ändert.

$$a + b = b + a$$

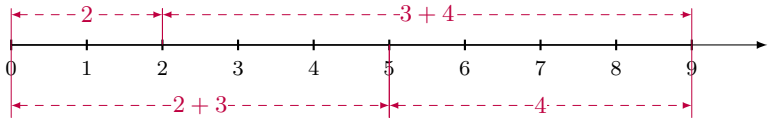
## 2.5 Assoziativgesetz

Grundsätzlich werden mehrere Additionen immer **von links nach rechts** ausgeführt. Um die Reihenfolge zu ändern, können Klammern verwendet werden. Operationen in Klammern werden zuerst ausgeführt.

***Beispiel.*** *Hier wird von links nach rechts gerechnet:* $2 + 3 + 4 = 5 + 4 = 9$

*Hier wird zuerst die Addition in den Klammern ausgeführt:* $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$

Offenbar spielt bei Addition diese Reihenfolge keine Rolle. Dies kann wieder anhand der geometrischen Darstellung auf der Zahlengeraden gezeigt werden:




**Assoziativgesetz.** Mehrere Additionen dürfen mit beliebiger Klammersetzung ausgeführt werden, ohne dass sich der Wert der Summe ändert.

$$a + b + c = a + (b + c)$$

## 2.6 Neutralität der Null

Die Zahl Null hat bezüglich der Addition eine besondere Stellung. Das Addieren von Null verändert den Wert nicht. Deshalb wird sie **neutral** bezüglich der Addition genannt.

**Neutralität der Null.** Zu einer Zahl kann Null addiert werden, ohne dass sich der Wert ändert:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

# 3 Multiplikation

## 3.1 Definition

Das wiederholte Addieren eines Summanden $a$ zur Ausgangszahl Null wird als Multiplizieren bezeichnet:

$$n \cdot a := 0 + \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-\text{mal}}$$

***Beispiel.*** *Ich kaufe fünfmal vier Äpfel. Dann habe ich insgesamt zwanzig Äpfel.*

$$5 \cdot 4 = 0 + \underbrace{4 + 4 + 4 + 4 + 4}_{5-\textit{mal}} = 20$$

Wird in dieser Definition $n = 0$ gesetzt, dann kommt $a$ gar nicht als Summand vor und das Ergebnis ist $0$.

**Multiplikation mit Null.** Das Produkt einer beliebigen Zahl $a$ und Null ist gleich Null.

$$0 \cdot a = 0$$

## 3.2 Schreib- und Sprechweise

Die beiden Zahlen $a$ und $b$, welche multipliziert werden, heissen **Faktoren**, das Ergebnis $c$ heisst **Produkt**.

Für die Multiplikation wird das Zeichen $\cdot$ verwendet. Wir schreiben

$$a \cdot b = c$$

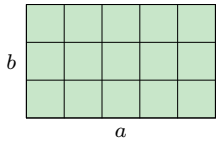
und sagen «$a$ mal $b$ ist gleich $c$.» oder «Das Produkt von $a$ und $b$ ist gleich $c$.»

***Beispiel.*** *Das Produkt von Zwei und Drei ist gleich Sechs:* $2 \cdot 3 = 6$

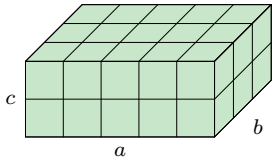
## 3.3 Geometrische Interpretation

Geometrisch entspricht das Produkt zweier Zahlen $a \cdot b$ dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit den entsprechenden Seiten $a$ und $b$.

Das Produkt dreier Zahlen $a \cdot b \cdot c$ entspricht dem Volumen eines Quaders mit den Seiten $a$, $b$ und $c$.




$a \cdot b$



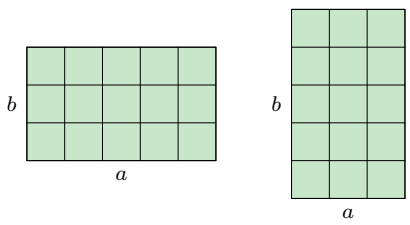

$a \cdot b \cdot c$

## 3.4 Kommutativgesetz

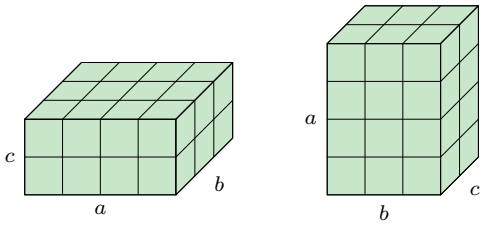
Anhand der geometrischen Interpretation wird ersichtlich, dass auch für die Multiplikation das Kommutativgesetz gelten muss. Das Vertauschen der beiden Faktoren entspricht dem Vertauschen der beiden Seitenlängen eines Rechtecks, was einer Drehung um 90° entspricht. Die Fläche des Rechtecks und somit das Produkt verändert sich dabei nicht.

**Kommutativgesetz.** Die Faktoren einer Multiplikation dürfen vertauscht werden, ohne dass sich der Wert des Produkts ändert:

$$a \cdot b = b \cdot a$$




**Kommutativgesetz**




**Assoziativgesetz**

## 3.5 Assoziativgesetz

Das Volumen eines Quaders ergibt sich aus der Grundfläche multipliziert mit der Höhe. Je nach Orientierung des Quaders ergibt sich somit eine andere Formel für das gleiche Volumen. Wird bei der rechten Formel das Kommutativgesetz angewendet, ergibt sich daraus das Assoziativgesetz für die Multiplikation.

**Assoziativgesetz.** Mehrere Multiplikationen dürfen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden, ohne dass sich der Wert des Produkts ändert:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

## 3.6 Neutralität der Eins

Die Eins hat bezüglich der Multiplikation eine besondere Stellung. Das Multiplizieren mit Eins verändert den Wert nicht.

**Neutralität der Eins.** Eine Zahl kann mit Eins multipliziert werden, ohne dass sich der Wert ändert:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

# 4 Potenz

## 4.1 Definition

Das wiederholte $n$-fache Multiplizieren eines Faktors $a$ mit der Ausgangszahl Eins wird als Potenzieren bezeichnet.

$$a^n := 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Wenn in dieser Definition $n = 0$ gesetzt wird, kommt $a$ gar nicht als Faktor vor und das Ergebnis ist Eins.

***Beispiel.*** $2^4 = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4\text{-mal}} = 16$

**Potenzieren mit Null.** Die nullte Potenz einer von Null verschiedenen Zahl $a$ ist gleich $1$.

$$a^0 = 1 \qquad a \neq 0$$

**Hinweis:** $0^0$ wird nicht definiert, da es in der Mathematik keine eindeutige, sinnvolle Antwort gibt, was der Wert von $0^0$ ist.

## 4.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl $a$, welche potenziert wird, heisst **Basis**. Die Zahl $b$ heisst **Exponent**. Das Ergebnis einer Potenzierung heisst **Potenz**.

Für das Potenzieren wird kein Operationszeichen verwendet. Stattdessen wird der Exponent $b$ hochgestellt nach der Basis $a$ geschrieben:

$$a^b = c$$

Wir sagen «$a$ hoch $b$ ist gleich $c$.» oder «Die $b$-te Potenz von $a$ ist gleich $c$».

***Beispiel.*** *Die vierte Potenz von Drei ist gleich* $81$*:*

$$3^4 = 81$$

Das Potenzieren mit Zwei wird als **Quadrieren** bezeichnet, das Ergebnis dieser Operation als **Quadrat**.

***Beispiel.*** *Das Quadrat von Fünf ist gleich* $25$*:*

$$5^2 = 25$$

**Achtung:** Für das Potenzieren gibt es weder ein Kommutativ- noch ein Assoziativgesetz.

$$8 = 2^3 \neq 3^2 = 9 \qquad\qquad 8 = 2^3 = \left(2^1\right)^3 \neq 2^{(1^3)} = 2^1 = 2$$

# 5 Subtraktion

## 5.1 Definition

Die Subtraktion ist die Umkehroperation der Addition. Mit der Subtraktion wird ein unbekannter Summand $x$ einer Addition berechnet:

$$x + b = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a - b$$

***Beispiel.*** *Ich kaufe drei Äpfel und habe nun acht Äpfel. Wie viele Äpfel hatte ich vorher?*

$$x + 3 = 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 8 - 3 = 5$$

## 5.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl $a$, von welcher subtrahiert wird, heisst **Minuend**. Die Zahl $b$, welche subtrahiert wird, heisst **Subtrahend**. Das Ergebnis einer Subtraktion wird **Differenz** genannt.

Für die Subtraktion wird das Operationszeichen $-$ verwendet. Wir schreiben

$$a - b = c$$

und sagen «$b$ subtrahiert von $a$ ist gleich $c$» oder «die Differenz von $a$ und $b$ ist gleich $c$.»

***Beispiel.*** *Die Differenz von Acht und Drei ist gleich Fünf:* $8 - 3 = 5$

**Achtung:** Für die Subtraktion gibt es weder ein Kommutativ- noch ein Assoziativgesetz.

$$2 - 3 \neq 3 - 2 = 1 \qquad\qquad 0 = 3 - 2 - 1 \neq 3 - (2 - 1) = 2$$

## 5.3 Abgeschlossenheit

Werden zwei beliebige natürliche Zahlen addiert, multipliziert oder potenziert, so ergibt sich wieder eine natürliche Zahl. In der Mathematik wird dies als **Abgeschlossenheit** der natürlichen Zahlen bezüglich dieser Operationen bezeichnet.

Die Subtraktion ist jedoch nicht abgeschlossen bezüglich der natürlichen Zahlen. So ergibt beispielsweise die folgende Subtraktion keine natürliche Zahl:

$$3 - 5 = x$$

Wenn wir in der Mathematik auf eine solche Lücke stossen, gibt es zwei Möglichkeiten, damit umzugehen.

Erstens können wir wie bei $0^0$ die Lücke akzeptieren und sagen, dass eine bestimmte Berechnung **nicht definiert** ist.

Zweitens können neue Zahlen definiert (mathematisch für «erfunden») werden, mit welchen diese Lücke gefüllt werden kann.

# 6 Ganze Zahlen

## 6.1 Gegenzahl

Welche Zahl muss zu Fünf addiert werden, um Null zu erhalten?

$$5 + \square = 0$$

Wenn nur die natürlichen Zahlen betrachtet werden, gibt es keine Antwort auf diese Frage. Deshalb wird eine neue Zahl definiert, mit welcher diese Lücke gefüllt werden kann.

Die Zahl, welche zu der gegebenen Zahl $a$ addiert wird, um die Summe Null zu erhalten, wird **Gegenzahl** von $a$ genannt und mit $-a$ bezeichnet:

$$a + (-a) = 0$$

***Beispiel.*** *Die Gegenzahl von* $5$ *ist* $-5$ *und* $5 + (-5) = 0$*.*

Die Gegenzahl von $0$ ist wieder $0$, da $0 + 0 = 0$ gilt. Deshalb ist $-0 = 0$.

Aus der Definition der Gegenzahl lässt sich sofort folgendes ableiten:

**Gegen-Gegenzahl.** Die Gegenzahl der Gegenzahl von $a$ ist die Zahl selbst:

$$-(-a) = a$$

***Beispiel.*** *Die Gegenzahl von* $-5$ *ist* $5$*.*

## 6.2 Definition

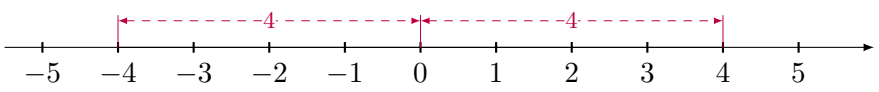
Wie wir schon gesehen haben, ist die Gegenzahl $-n$ einer natürlichen Zahl $n$ keine natürliche Zahl. Um die Ergebinsse aller Subtraktionen von natürlichen Zahlen darstellen zu können, werden die natürlichen Zahlen um ihre Gegenzahlen erweitert.

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ enthält sämtliche natürliche Zahlen sowie ihre Gegenzahlen.

$$\mathbb{Z} := \{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$$

## 6.3 Geometrische Darstellung

Um die ganzen Zahlen geometrisch darzustellen, wird der Zahlenstrahl zu einer Zahlengerade erweitert. Dabei wird die Gegenzahl jeder Zahl gegenüberliegend der Null dargestellt. So wird die Zahl $-4$ auf der anderen Seite von Null mit gleichem Abstand zur Null wie die Zahl $4$ dargestellt.



## 6.4 Betrag

Der Abstand einer Zahl $a$ zur Null auf der Zahlengerade wird als ihr Betrag $|a|$ bezeichnet.

Der **Betrag** $|a|$ einer negativen Zahl $a$ ist die Gegenzahl von $a$. Der Betrag $|a|$ einer nichtnegativen Zahl $a$ ist gleich $a$.

$$|a| := \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

***Beispiel.*** $|-3| = 3 \qquad |4| = 4 \qquad |-4| = 4$

## 6.5 Abgeschlossenheit

Die ganzen Zahlen sind bezüglich der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation abgeschlossen. Das bedeutet, dass die Summe, die Differenz und das Produkt zweier ganzen Zahlen immer eine ganze Zahl ist.

## 6.6 Teilmengen

Oft wird von bestimmten Teilmengen der ganzen Zahlen gesprochen. Dabei werden die folgenden Begriffe und Symbole verwendet:

| **Begriff** | **Symbol** | **Menge** |
|---|---|---|
| positive ganze Zahlen | $\mathbb{Z}^+$ | $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\}$ |
| nichtnegative ganze Zahlen | $\mathbb{Z}_0^+$ | $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\} = \mathbb{N}$ |
| negative ganze Zahlen | $\mathbb{Z}^-$ | $\{\ldots;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ \ldots\}$ |
| nichtpositive ganze Zahlen | $\mathbb{Z}_0^-$ | $\{\ldots;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0\}$ |

## 6.7 Negative Zahlen und Gegenzahlen

Es ist nicht so, dass Gegenzahlen immer negativ sind. Jede beliebige Zahl $a$ hat eine Gegenzahl, egal ob $a$ selbst positiv ist, oder nicht. Die Gegenzahl von $a = -5$ ist beispielsweise $-a = -(-5) = 5$.

Wenn eine Variable $a$ verwendet wird, um von einer beliebigen Zahl zu sprechen, kann es also auch sein, dass die Gegenzahl $-a$ eine positive Zahl ist und zwar genau dann, wenn $a$ eine negative Zahl ist.

## 6.8 Rechenregeln

Für das Rechnen mit Gegenzahlen gelten die folgenden Rechenregeln:

**Addition und Subtraktion.** Das Addieren der Gegenzahl ist das Gleiche wie das Subtrahieren der Zahl. Das Subtrahieren der Gegenzahl ist das gleiche wie das Addieren der Zahl.

$$a + (-b) = a - b \qquad a - (-b) = a + b$$

***Beispiel.*** $5 + (-3) = 5 - 3 = 2 \qquad 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$

**Subtraktion einer Summe/Differenz.** Die Subtraktion einer Summe ist das Gleiche wie das Subtrahieren beider Summanden, die Subtraktion einer Differenz entspricht dem Subtrahieren des Minuenden und dem Addieren des Subtrahenden.

$$a - (b + c) = a - b - c \qquad a - (b - c) = a - b + c$$

***Beispiel.*** $5 - (3 + 2) = 5 - 5 = 0 \qquad 5 - (3 - 2) = 5 - 1 = 4$

**Multiplikation von Gegenzahlen.** Für die Multiplikation von Gegenzahlen gelten folgende Regeln:

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b \qquad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

**Anmerkung:** Wir haben gesehen, dass die Subtraktion nicht kommutativ ist, also $6-3 \neq 3-6$. Mittels der Gegenzahlen können wir aber etwas tricksen, denn $6 - 3 = 6 + (-3) = (-3) + 6$.

**Potenzen einer negativen Zahl.** Die Potenz einer negativen Zahl $-n$ mit einem **geraden Exponenten** $b$ ist gleich der Potenz mit der Gegenzahl $n$ als Basis.

$$(-n)^b = n^b \qquad \text{wenn } b \text{ gerade}$$

Die Potenz einer negativen Zahl $-n$ mit einem **ungeraden Exponenten** $b$ ist gleich der Gegenzahl der Potenz mit der Gegenzahl $n$ als Basis.

$$(-n)^b = -n^b \qquad \text{wenn } b \text{ ungerade}$$

***Beispiel.*** $(-5)^2 = 25 \qquad (-5)^3 = -125$

# 7 Division, Teilbarkeit und Primzahlen

## 7.1 Division

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation. Mit der Division wird ein unbekannter Faktor $x$ einer Multiplikation berechnet:

$$x \cdot b = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a : b$$

***Beispiel.*** *Ich verteile zwölf Äpfel auf vier Personen. Wie viele Äpfel erhält jede Person?*

$$x \cdot 4 = 12 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 12 : 4 = 3$$

## 7.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl $a$, welche dividiert (geteilt) wird, heisst **Dividend**. Die Zahl $b$, durch welche dividiert wird, heisst **Divisor**. Das Ergebnis einer Division wird **Quotient** genannt.

Für die Division wird das Operationszeichen : verwendet. Wir schreiben

$$a : b = c$$

und sagen «$a$ dividiert durch $b$ ist gleich $c$» oder «der Quotient von $a$ und $b$ ist gleich $c$.»

***Beispiel.*** *Der Quotient von Zwölf und Drei ist gleich Vier:* $12 : 3 = 4$

**Achtung:** Für die Division gibt es weder ein Kommutativ- noch ein Assoziativgesetz.

$$3 : 12 \neq 12 : 3 = 4 \qquad\qquad 1 = 8 : 4 : 2 \neq 8 : (4 : 2) = 4$$

## 7.3 Abgeschlossenheit

Die Division ist nicht abgeschlossen bezüglich der natürlichen und ganzen Zahlen. So ergibt beispielsweise die Division $2 : 5 = x$ keine ganze Zahl.

Später werden wir diese Lücke ebenfalls füllen und dafür neue Zahlen, die rationalen Zahlen, «erfinden». Zunächst wollen wir aber die Lücke akzeptieren und untersuchen, für welche Divisoren $t$ eine Division $a : t$ definiert ist.

## 7.4 Teiler und Teilbarkeit

Die ganze Zahl $a$ heisst **teilbar** durch die natürliche Zahl $t$, falls die Division $a : t$ eine ganze Zahl $z$ ergibt. Die Zahl $t$ ist dann ein **Teiler** von $a$.

***Beispiel.*** *Drei ist ein Teiler von Zwölf, Vier ist kein Teiler von Fünf:*

$$12 : 3 = 4 \qquad\qquad 5 : 4 = ?$$

Die Zahlen Null und Eins haben spezielle Eigenschaften:

- Jede ganze Zahl ist durch Eins teilbar.
- Keine Zahl ist durch Null teilbar.
- Null ist durch jede andere ganze Zahl teilbar.

**Teilermenge.** Die Menge aller Teiler einer Zahl $n$ wird mit $T_n$ bezeichnet.

***Beispiel.*** $T_{60} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 10;\ 12;\ 15;\ 20;\ 30;\ 60\}$ $\qquad$ $T_{13} = \{1;\ 13\}$

**Gerade und ungerade Zahlen.** Eine ganze Zahl, welche durch zwei teilbar ist, heisst gerade Zahl. Eine ganze Zahl, welche nicht durch zwei teilbar ist, wird als ungerade Zahl bezeichnet.

## 7.5 Teilbarkeitsregeln

Für die Divisoren Zwei bis Zehn gibt es einfache Regeln, um die Teilbarkeit zu überprüfen. Dabei ist die Quersumme einer Zahl die Summe ihrer Ziffern.

| Divisor | Regel für Dividend |
|---|---|
| $2$ | letzte Ziffer ist gerade |
| $3$ | Quersumme ist durch $3$ teilbar |
| $4$ | letzte zwei Ziffern sind durch $4$ teilbar |
| $5$ | letzte Ziffer ist $0$ oder $5$ |
| $6$ | ist durch $2$ und $3$ teilbar |
| $7$ | letzte Ziffer verdoppelt und vom Rest der Zahl subtrahiert ist durch $7$ teilbar |
| $8$ | letzte drei Ziffern sind durch $8$ teilbar |
| $9$ | Quersumme ist durch $9$ teilbar |
| $10$ | letzte Ziffer ist $0$ |

***Beispiel.*** *Im folgenden wird für jeden Divisor ein Beispiel betrachtet:*

- $46$ *ist durch* $2$ *teilbar, da die letzte Ziffer* $6$ *gerade ist.*
- $783$ *ist durch* $3$ *teilbar, da die Quersumme* $7+8+3=18$ *durch* $3$ *teilbar ist.*
- $964$ *ist durch* $4$ *teilbar, da die letzten zwei Ziffern* $64$ *durch* $4$ *teilbar sind.*
- $875$ *ist durch* $5$ *teilbar, da die letzte Ziffer eine* $5$ *ist.*
- $318$ *ist durch* $6$ *teilbar, da die letzte Ziffer* $8$ *gerade ist und die Quersumme* $3+1+8=12$ *durch* $3$ *teilbar ist.*
- $357$ *ist durch* $7$ *teilbar, da* $35-(7\cdot 2)=21$ *durch* $7$ *teilbar ist.*
- $4624$ *ist durch* $8$ *teilbar, da* $624$ *durch* $8$ *teilbar ist.*
- $819$ *ist durch* $9$ *teilbar, da die Quersumme* $8+1+9=18$ *durch* $9$ *teilbar ist.*
- $18390$ *ist durch* $10$ *teilbar, da die letzte Ziffer eine* $0$ *ist.*

## 7.6 Primzahlen

Eine natürliche Zahl ist **prim** oder eine **Primzahl**, wenn sie **genau zwei Teiler** hat.

Die beiden Teiler sind Eins und die Zahl selbst. Somit ist die Zahl Eins keine Primzahl, da sie nur einen Teiler hat.

Die Zwei ist die kleinste Primzahl und gleichzeitig die einzige gerade Primzahl. Alle anderen geraden Zahlen haben neben Eins und sich selbst auch die Zwei als Teiler und haben somit mehr als zwei Teiler.

***Beispiel.*** *Die ersten zehn Primzahlen lauten:* $2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;\ 23;\ 29$

## 7.7 Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl $n$ kann eindeutig in **Primfaktoren** zerlegt werden. Das heisst, jede natürliche Zahl $n$ kann als Multiplikation von Primzahlen $p_i$ dargestellt werden:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k$$

***Beispiel.*** $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

## 7.8 ggT und kgV

Den grössten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier Zahlen können mithilfe der Primfaktorzerlegung der beiden Zahlen ermittelt werden.

$$6468 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \qquad\qquad 840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Der grösste gemeinsame Teiler ist das Produkt aller Primfaktoren, welche in beiden Zerlegungen vorkommen.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6468 =$ | $2$ | $\cdot$ | $2$ | | | $\cdot$ | $3$ | | | $\cdot$ | $7$ | $\cdot$ | $7$ | $\cdot$ | $11$ | |
| $840 =$ | $2$ | $\cdot$ | $2$ | $\cdot$ | $2$ | $\cdot$ | $3$ | $\cdot$ | $5$ | $\cdot$ | $7$ | | | | | |
| $\mathrm{ggT}(6468, 840) =$ | $2$ | $\cdot$ | $2$ | | | $\cdot$ | $3$ | | | $\cdot$ | $7$ | | | | | $= 84$ |

Für das kleinste gemeinsame Vielfache werden diejenigen Primfaktoren multipliziert, welche in mindestens einer der beiden Zerlegungen vorkommen:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6468 =$ | $2$ | $\cdot$ | $2$ | | | $\cdot$ | $3$ | | | $\cdot$ | $7$ | $\cdot$ | $7$ | $\cdot$ | $11$ | |
| $840 =$ | $2$ | $\cdot$ | $2$ | $\cdot$ | $2$ | $\cdot$ | $3$ | $\cdot$ | $5$ | $\cdot$ | $7$ | | | | | |
| $\mathrm{kgV}(6468, 840) =$ | $2$ | $\cdot$ | $2$ | $\cdot$ | $2$ | $\cdot$ | $3$ | $\cdot$ | $5$ | $\cdot$ | $7$ | $\cdot$ | $7$ | $\cdot$ | $11$ | $= 64680$ |

# 8 Terme

Ein Term ist eine Beschreibung einer Rechenvorschrift in mathematischer Notation.

***Beispiel.*** *Die Rechenvorschrift «Multipliziere die Summe von Drei und Zwei mit Vier» wird als Term wie folgt geschrieben:*

$$(2+3)\cdot 4$$

Der **Wert** eines Terms ist das Ergebnis der Rechnung und ist eindeutig definiert. Wenn ein Term nicht berechnet werden kann, so ist sein Wert **nicht definiert.**

***Beispiel.*** *Der Wert des Terms* $2^3$ *ist Acht. Der Wert des Terms* $0^0$ *ist nicht definiert.*

Eine wichtige Grundregel bei Termen ist, dass **nie zwei Operationszeichen** direkt nacheinander stehen dürfen.

## 8.1 Reihenfolge der Operationen

Damit bei einem Term wie $2+3\cdot 5^2$ immer das gleiche Ergebnis entsteht, muss die Reihenfolge, in welcher die Operationen ausgeführt werden, klar geregelt werden. Dabei gelten folgende Vorschriften:

**1. Klammern zuerst.** Zuerst werden immer Operationen innerhalb von Klammern ausgeführt. Bei mehreren verschachtelten Klammern wird immer zuerst die innerste Klammer ausgerechnet.

***Beispiel.*** $5(2+3)=5\cdot 5=25$ $(2\cdot 3)^2=6^2=36$

**2. Potenzen.** Danach werden Potenzen berechnet. Mehrere Potenzen werden von **oben nach unten** ausgeführt.

***Beispiel.*** $2\cdot 3^2=2\cdot 9=18$ $2^{3^2}=2^9=512$ $\left(2^3\right)^2=8^2=64$

**3. Gegenzahl.** Danach wird ein allfälliges Minuszeichen, welches keine Subtraktion darstellt, als Gegenzahl interpretiert:

***Beispiel.*** $-5\cdot(-2)=(-5)\cdot(-2)=10$ *aber* $-5^2=-\left(5^2\right)=-25$

**4. Multiplikation und Division.** Danach werden Multiplikationen und Divisionen ausgerechnet. Mehrere aufeinanderfolgende Operationen werden von **links nach rechts** ausgeführt.

***Beispiel.*** $5\cdot 2+3=10+3=13$ $2\cdot 3\cdot 4=6\cdot 4=24$

**5. Addition und Subtraktion.** Danach werden Additionen und Subtraktionen ausgerechnet. Mehrere aufeinanderfolgende Operationen werden von **links nach rechts** ausgeführt.

***Beispiel.*** $2-3+4=(-1)+4=3$ $2-(3+4)=2-7=-5$

## 8.2 Variablen

Wenn eine Zahl nicht bekannt ist, wird sie durch eine Variable dargestellt. Variablen werden normalerweise als Kleinbuchstaben dargestellt.

***Beispiel.*** *«Zu einer Zahl $x$ wird Fünf addiert, das Zwischenergebnis wird verdoppelt.»*

$(x + 5) \cdot 2$

*«Die erreichten Punkte $p$ werden durch die maximale Punktzahl $m$ geteilt und mit Fünf multipliziert. Schliesslich wird Eins addiert.»*

$p : m \cdot 5 + 1$

Bei Termen mit Variablen gibt es einige Dinge zu beachten.

Das Multiplikationszeichen wird vor und nach Variablen üblicherweise weggelassen:

$$a \cdot b = ab \qquad\qquad 5 \cdot a = 5a$$

Das Weglassen des Multiplikationszeichens ändert jedoch die Rechenvorschriften nicht. Das kann zu Unklarheiten führen, wenn die Multiplikation nicht die erste auszuführende Operation ist. Im Zweifelsfall wird das Zeichen besser beibehalten.

$$a : bc = (a : b) \cdot c \neq a : (bc) \qquad\qquad 2a^2 = 2 \cdot a^2 \neq (2a)^2$$

Mehrere Faktoren werden so sortiert, dass zuerst die Zahl steht, dann die Variablen in alphabetischer Reihenfolge. Das ist erlaubt wegen der Kommutativität der Multiplikation.

$$c \cdot 2 \cdot a \cdot 3 = 6ac$$

Mehrere Summanden, welche die gleichen Variablen enthalten, dürfen dank dem Assoziativgesetz zusammengefasst werden. Dabei können einfach die Zahlen in diesen Summanden addiert werden.

$$5a + 4a = 5 \cdot a + 4 \cdot a = a \cdot (5 + 4) = a \cdot 9 = 9a$$

## 8.3 Wert eines Terms, Äquivalenz

Der Wert eines Terms ist das Ergebnis, welches entsteht, wenn alle Rechenvorschriften im Term in der korrekten Reihenfolge ausgeführt werden.

Bei Termen ohne Variablen kann der Wert einfach durch Ausrechnen bestimmt werden.

***Beispiel.*** $17 + 5 \cdot 2 = 17 + 10 = 27 \qquad (1 + 8)^2 = 9^2 = 81$

Für Terme mit Variablen kann der Wert bestimmt werden, indem für die Variablen Zahlen eingesetzt werden. Dabei wird die gleiche Variable immer durch die gleiche Zahl ersetzt.

***Beispiel.*** *Der Wert des Terms $(a + b)^2$ für $a = 5$ und $b = -3$ ist:*

$$(a + b)^2 = (5 + (-3))^2 = 2^2 = 4$$

*Der Wert des Terms $a^2 + 2ab + b^2$ für $a = 5$ und $b = -3$ ist:*

$$a^2 + 2ab + b^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot (-3) + (-3)^2 = 25 - 30 + 9 = 4$$

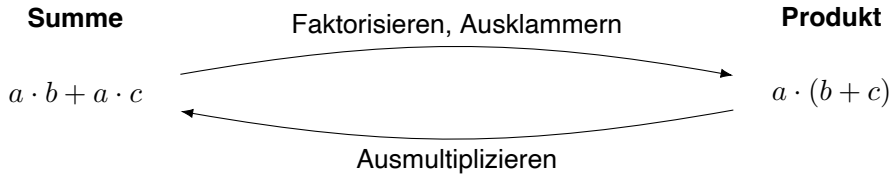
Bei den beiden Termen oben fällt auf, dass sie den gleichen Wert haben, wenn die gleichen Werte $a = 5$ und $b = -3$ eingesetzt werden. Tatsächlich ergeben die beiden Terme immer den gleichen Wert, egal welche Zahlen für die Variablen $a$ und $b$ eingesetzt werden. Dies führt zu der folgenden Definition:

**Definition:** Zwei Terme heissen **äquivalent** oder **gleichwertig**, wenn sie für alle möglichen Werte der Variablen immer den gleichen Wert besitzen.

Das Umformen von Termen in äquivalente Terme ist in der Mathematik von zentraler Bedeutung. Terme dürfen ausschliesslich mithilfe der bekannten Rechengesetze umgeformt werden.

# 9 Faktorisieren und Ausmultiplizieren

Durch das **Faktorisieren** oder Ausklammern wird eine Summe in ein Produkt umgeformt. Durch das **Ausmultiplizieren** wird ein Produkt in eine Summe umgeformt.




## 9.1 Distributivgesetz

Das Distributivgesetz verbindet die Addition und die Multiplikation. Es kann ebenfalls durch eine geometrische Überlegung begründet werden. Wird das Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$ und das Rechteck mit den Seiten $a$ und $c$ zusammengesetzt, so ergibt sich ein Rechteck mit den Seiten $a$ und $b + c$, welches die gleiche Fläche wie die beiden ersten Rechtecke hat.




**Distributivgesetz.** Eine Summe wird mit einem Faktor $a$ multipliziert, indem jeder Summand mit $a$ multipliziert wird.

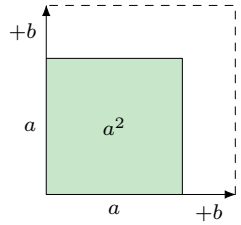
$$a(b + c) = ab + ac$$

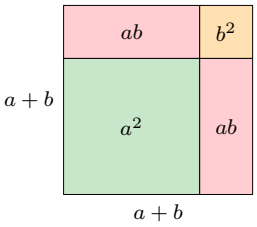
## 9.2 Binomische Formeln

**Binomische Formeln.** Es gelten die drei binomischen Formeln:

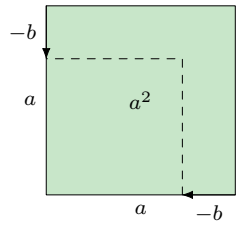
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{erste binomische Formel}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{zweite binomische Formel}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{dritte binomische Formel}$$

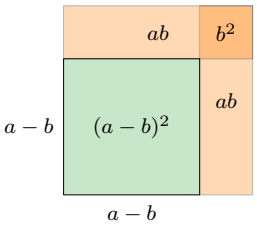
Die erste binomische berechnet die Fläche des Quadrats, das entsteht, wenn das Quadrat mit der Seitenlänge $a$ nach rechts und oben um $b$ vergrössert wird. Dazu wird rechts und oben ein Rechteck mit der Fläche $ab$ angesetzt. Oben rechts wird noch das Quadrat mit der Seitenlänge $b$ ergänzt.



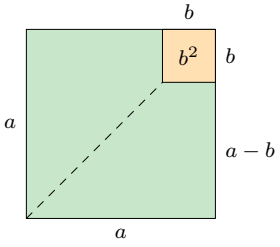



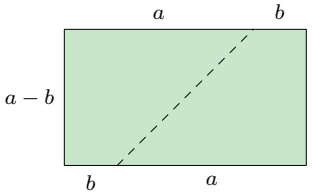

Die zweite binomische Formel berechnet die Fläche des Quadrats, welches entsteht, wenn vom Quadrat mit der Seitenlänge $a$ rechts und oben ein Streifen der Breite $b$ abgeschnitten wird. Dabei wird zwei Mal ein Rechteck der Fläche $ab$ abgeschnitten, also $2ab$. Das Quadrat mit der Seitenlänge $b$ wurde dabei jedoch doppelt gezählt. Deshalb muss $b^2$ wieder addiert werden.




Die dritte binomische Formel berechnet die Fläche, welche entsteht, wenn aus dem Quadrat mit der Seitenlänge $a$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $b$ ausgeschnitten wird. Die resultierende Fläche kann auseinander geschnitten und so arrangiert werden, dass ein Rechteck mit den Seitenlängen $a+b$ und $a-b$ entsteht.



# 10 Gleichungen

## 10.1 Definition

Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, welche mit einem Gleichheitszeichen verbunden werden:

$$\square = \square$$

Dadurch entsteht eine Aussage oder eine Aussageform. Anstelle des Gleichheitszeichens können auch verschiedene Ungleichheitszeichen verwendet werden:

| | |
|---|---|
| $A$ ist kleiner als $B$ | $A < B$ |
| $A$ ist kleiner als oder gleich $B$ | $A \leq B$ |
| $A$ ist gleich $B$ | $A = B$ |

| | |
|---|---|
| $A$ ist grösser als oder gleich $B$ | $A \geq B$ |
| $A$ ist grösser als $B$ | $A > B$ |
| $A$ ist nicht gleich $B$ | $A \neq B$ |

## 10.2 Aussagen und Wahrheit

Eine **Aussage** ist eine Behauptung, welche einen Wahrheitsgehalt zugeordnet werden kann, die also entweder als **wahr** oder als **falsch** bezeichnet werden kann.

***Beispiel.*** *Aussagen sind:*

*«Heute scheint die Sonne.»* *«Das Quadrat von 5 ist 36.»* *«Ich heisse Otto.»*

In der Alltagswelt hängt der Wahrheitsgehalt einer Aussage oft von äusseren Umständen ab. In der Mathematik kann sich der Wahrheitsgehalt einer Aussage nicht ändern. Eine mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Es gibt aber auch mathematische Aussagen, von welchen nicht bekannt ist, ob sie wahr oder falsch sind. Eine berühmte solche Aussage ist die Riemannsche Vermutung:

«Alle nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion haben den Realteil $\frac{1}{2}$.»

Ausserdem hat der Mathematiker Kurt Gödel bewiesen, dass es mathematische Aussagen gibt, von welchen nicht bestimmt werden kann, ob sie wahr oder falsch sind.

## 10.3 Aussageformen

Eine **Aussageform** ist eine Aussage, welche eine oder mehrere Lücken enthält. Ob die Aussage wahr oder falsch ist, hängt davon ab, was in die Lücken eingesetzt wird.

***Beispiel.*** *Aussageformen sind:*

*«__ scheint die Sonne.»* *«Das Quadrat von ____ ist __.»* *«Ich heisse __.»*

In der Formelsprache der Mathematik werden Aussageformen als Gleichungen oder Ungleichungen geschrieben, welche eine oder mehrere Variablen enthalten. Den Wahrheitsgehalt kann erst beurteilt werden, wenn die Variablen durch Zahlen ersetzt werden:

***Beispiel.*** *Wenn in einer Gleichung $x \cdot 2 = 8$ die Variable durch eine Zahl ersetzt wird, entsteht eine Aussage, welche entweder wahr oder falsch ist:*

- *Die Aussage $3 \cdot 2 = 8$ ist falsch.*
- *Die Aussage $4 \cdot 2 = 8$ ist wahr.*

## 10.4 Arten von Gleichungen

Wir unterscheiden verschiedene Arten von Gleichungen:

**Identitäten** sind Gleichungen, welche ein mathematische Gesetze darstellen. Sie sind immer wahr, egal welche Zahlen eingesetzt werden. Identitäten können verwendet werden, um Terme umzuformen.

***Beispiel.*** *Die Kommutativität der Addition und die erste binomische Formel sind Identitäten:*

$$a + b = b + a \qquad\qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Definitionen** führen neue Begriffe oder Bezeichnungen ein. Dabei wird ein Term auf der rechten Seite der Gleichung durch einen neues Symbol auf der linken Seite der Gleichung abgekürzt. Damit ersichtlich ist, dass es sich um eine Definition handelt, wird manchmal das Definitions-Gleichheitszeichen $:=$ verwendet.

***Beispiel.*** *Die Potenz wird als wiederholte Multiplikation definiert:*

$$a^n := 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

*Die Kreiszahl Pi wird als Verhältnis des Umfang $U$ eines Kreises zu seinem Durchmesser $d$ definiert:*

$$\pi := U : d$$

**Bestimmungsgleichungen** sind Gleichungen, welche meistens eine Variable enthalten und welche nicht unbedingt für alle möglichen Werte der Variable wahr sind. Bei solchen Gleichungen gilt es herauszufinden, welche Zahlen in die Variablen eingesetzt werden können, damit eine wahre Aussage entsteht.

## 10.5 Lösungsmenge

Die **Lösungsmenge** $L$ ist die Menge aller Zahlen, welche anstelle der Variable in eine Bestimmungsgleichung eingesetzt werden können, sodass eine wahre Aussage entsteht.

***Beispiel.*** *Die folgende Gleichung ist korrekt, wenn für $x$ der Wert $5$ oder $-5$ eingesetzt wird:*

$$x^2 = 25$$

*Die Lösungsmenge $L$ dieser Gleichung lautet also $L = \{-5;\ 5\}$.*

Um die Lösungsmenge einer Gleichung zu bestimmen, muss diese normalerweise zuerst umgeformt werden. Im folgenden schauen wir an, wie Gleichungen umgeformt werden dürfen.

## 10.6 Äquivalenzumformungen

Zwei Gleichungen heissen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben.

***Beispiel.*** *Die folgenden drei Gleichungen sind zueinander äquivalent, da sie alle die selbe Lösungsmenge $L = \{2\}$ haben:*

$$2x = 4 \qquad -x = -2 \qquad x = 2$$

*Die folgende Gleichung hat die Lösungsmenge $L = \{-2;\ 2\}$ und ist damit nicht äquivalent zu den drei obigen.*

$$x^2 = 4$$

Folgende Äquivalenzumformungen dürfen an allen Gleichungen und Ungleichungen vorgenommen werden:

- Termumformungen vornehmen.
- Zu beiden Seiten den gleichen Term addieren.
- Von beiden Seiten den gleichen Term subtrahieren.
- Beide Seiten mit gleicher positiver Zahl multiplizieren.
- Beide Seiten durch gleiche positive Zahl dividieren.

Folgende Äquivalenzumformungen dürfen an allen Gleichungen und Ungleichungen vorgenommen werden, wenn gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umgedreht wird.

- Beide Seiten vertauschen.
- Beide Seiten mit gleicher negativer Zahl multiplizieren.
- Beide Seiten durch gleiche negative Zahl dividieren.

Eine Gleichung oder Ungleichung darf auf keinen Fall mit Null multipliziert oder durch Null dividiert werden.

## 10.7 Umformungsprotokoll

Damit die an einer Gleichung vorgenommenen Umformungen nachvollzogen werden können, wird ein **Umformungsprotokoll** geführt. Dazu wird rechts der Gleichung, durch eine vertikale Linie abgetrennt, jeweils der Umformungsschritt angegeben.

## 10.8 Termumformungen

Die Terme auf beiden Seiten der Gleichung oder Ungleichung dürfen gemäss den bekannten Gesetzen umgeformt werden. Beispielweise dürfen Klammern mit einer binomischen Formel ausmultipliziert werden oder Summanden mit dem Kommutativgesetz umgestellt werden.

***Beispiel.***

$$
\begin{aligned}
(x+2)^2 + 2x &= x^2 - x - 10 && \text{erste binomische Formel} \\
x^2 + 4x + 4 + 2x &= x^2 - x - 10 && \\
x^2 + 4x + 4 + 2x &= x^2 - x - 10 && \text{Kommutativität Addition} \\
x^2 + 4x + 2x + 4 &= x^2 - x - 10 && \\
x^2 + 4x + 2x + 4 &= x^2 - x - 10 && \text{Assoziativitätsgesetz} \\
x^2 + (4+2)x + 4 &= x^2 - x - 10 && \\
x^2 + (4+2)x + 4 &= x^2 - x - 10 && \text{Ausrechnen} \\
x^2 + 6x + 4 &= x^2 - x - 10 &&
\end{aligned}
$$

## 10.9 Addieren / Subtrahieren

Auf beiden Seiten einer Gleichung oder Ungleichung darf der gleiche Term addiert oder subtrahiert werden. Dabei darf der Term auch Variablen enthalten.

Das Addieren oder Subtrahieren eines Terms wird häufig dazu verwendet, alle Vorkommen der Variable auf eine Seite der Gleichung zu bringen.

***Beispiel.***

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6x + 4 &= x^2 - x - 10 && -x^2 \\
6x + 4 &= -x - 10 && \\
6x + 4 &= x - 10 && +x \\
7x + 4 &= -10 && \\
7x + 4 &= -10 && -4 \\
7x &= -14 &&
\end{aligned}
$$

Achtung, die Addition oder Subtraktion bezieht sich auf den **ganzen** Term. Summanden dürfen nur dann direkt aus dem Term gestrichen werden, wenn sie nicht innerhalb von Klammern auftreten. Klammern müssen zuerst ausmultipliziert werden.

***Beispiel.***

$$
\begin{aligned}
2(x+1) &= x && -x \\
2(x+1) - x &= 0 && \text{Distributivgesetz} \\
2x + 2 - x &= 0 && \text{Zusammenfassen} \\
x + 2 &= 0 &&
\end{aligned}
$$

Am obenstehenden Beispiel ist eine weitere wichtiger Sonderfall zu erkennen: Wenn der ganze Term einer Seite der Gleichung subtrahiert wird, dann bleibt auf der entsprechenden Seite Null übrig.

## 10.10 Multiplizieren / Dividieren

Beide Seiten einer Gleichung oder Ungleichung dürfen mit der gleichen Zahl **ungleich Null** multipliziert oder dividiert werden.

***Beispiel.***

$$\begin{aligned} 7x &= -14 \quad \Big| \ :7 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Dabei muss ger ganzen Term auf jeder Seite der Gleichung mit der Zahl multipliziert bzw. durch die Zahl dividiert werden:

***Beispiel.***

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 2 \quad \Big| \ :2 \\ (2x + 4) : 2 &= 2 : 2 \quad \Big| \ \textit{ausrechnen} \\ x + 2 &= 1 \end{aligned}$$

Wenn eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert wird, so muss das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden. Das folgende Beispiel illustriert dies:

***Beispiel.***

$$\begin{aligned} 7 &> -7 \quad \Big| \ \cdot(-2) \\ 7 \cdot (-2) &< (-7) \cdot (-2) \quad \Big| \ \textit{ausrechnen} \\ -14 &< 14 \end{aligned}$$