Brüche

Grundregeln für Brüche

Vollständig kürzen. Brüche werden immer vollständig gekürzt.

Beispiel. *nicht* $\frac{2}{4}$*, sondern* $\frac{1}{2}$*.*

Negative Brüche. Das Minuszeichen von negativen Brüchen wird im Zähler geschrieben.

Beispiel. *nicht* $-\frac{1}{3}$ *oder* $\frac{1}{-3}$*, sondern* $\frac{-1}{3}$*.*

Reine Brüche. Zahlen werden als reine Brüche geschrieben. Die Darstellung als gemischte Brüche wird in der Mathematik nicht verwendet.

Beispiel. *nicht* $2\frac{1}{3}$*, sondern* $\frac{7}{3}$*.*

Ganze Zahlen. Brüche mit dem Nenner 1 sind ganze Zahlen und werden ohne Bruchstrich geschrieben.

Beispiel. *nicht* $\frac{5}{1}$*, sondern* 5*, nicht* $\frac{-3}{1}$*, sondern* -3*.*

1. **Kürzen.** Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch die gleiche ganze Zahl dividiert werden. Dabei bleibt der Wert des Bruchs gleich.

   Ein Bruch $\frac{z}{n}$ ist **vollständig gekürzt**, wenn der grösste gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner gleich eins ist, also wenn $\mathrm{ggT}(z,n)=1$.

   Beispiel. $\frac{12}{18}=\frac{12:6}{18:6}=\frac{2}{3}$

   Wie lauten diese Brüche vollständig gekürzt?

   (a) $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

   (b) $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$

   (c) $\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$

   (d) $\frac{-120}{150}=\frac{-4}{5}$

   (e) $\frac{75}{90}=\frac{5}{6}$

(f) $\frac{-32}{-8} = 4$

2. **Effizient Kürzen.** Es ist effizienter zu kürzen, bevor Zähler und Nenner ausmultipliziert werden.

   Wie werden diese Brüche möglichst effizient gekürzt?

   (a) $\frac{21 \cdot 12 \cdot 30}{7 \cdot 6 \cdot 15} = \boxed{12}$

   (b) $\frac{12 \cdot 18 \cdot 2}{24 \cdot 4 \cdot 9} = \boxed{\frac{1}{2}}$

   (c) $\frac{3 \cdot 5 \cdot 11}{33 \cdot 9 \cdot 25} = \boxed{\frac{1}{45}}$

   (d) $\frac{24 \cdot 3 \cdot 19}{38 \cdot 72} = \boxed{\frac{1}{2}}$

   (e) $\frac{30}{2 \cdot 6 \cdot 10} = \boxed{\frac{1}{4}}$

   (f) $\frac{42 \cdot 15}{12 \cdot 35} = \boxed{\frac{3}{2}}$

3. **Korrekt Kürzen.** Steht jedoch in Zähler oder Nenner eine Summe oder eine Differenz, darf nicht gekürzt werden!

   Wie werden diese Brüche korrekt gekürzt?

   (a) $\frac{25 + 15}{25} = \frac{8}{5}$

   (b) $\frac{-14 - 12}{7} = \frac{-26}{7}$

   (c) $\frac{-14 + 3}{14 - 3} = -1$

   (d) $\frac{15 \cdot 3 + 3}{9} = \frac{16}{3}$

   (e) $\frac{-6 + 2 \cdot 4}{2 \cdot 3 - (3 + 1)} = 1$

   (f) $\frac{2 + 1}{2 - 1} = 3$

4. **Erweitern.** Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit der gleichen ganzen Zahl multipliziert werden. Dabei bleibt der Wert des Bruchs gleich.

Beispiel. $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$

Wie werden diese Brüche auf den angegebenen Nenner erweitert?

(a) $\frac{3}{4} = \frac{36}{48}$

(b) $\frac{7}{5} = \frac{56}{40}$

(c) $\frac{5}{12} = \frac{100}{240}$

(d) $\frac{3}{8} = \frac{150}{400}$

(e) $\frac{-16}{35} = \frac{-64}{140}$

(f) $\frac{3}{2} = \frac{-15}{-10}$

5. **Addition und Subtraktion.** Brüche werden zuerst durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner gebracht. Der gemeinsame Nenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Nenner. Danach werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert, der Nenner wird nicht verändert.

   Beispiel. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9+8-2}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

   Wie lautet das vollständig gekürzte Ergebnis?

   (a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

   (b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

   (c) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{23}{20}$

   (d) $\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{29}{24}$

   (e) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

   (f) $\frac{4}{15} - \frac{2}{5} = \frac{-2}{15}$

   (g) $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{5}{24}$

   (h) $\frac{3}{8} - \frac{7}{10} = \frac{-13}{40}$

(i) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

6. **Multiplikation.** Brüche werden multipliziert, indem Zähler und Nenner multipliziert werden.

   Beispiel. *Zwei Drittel von drei Vierteln ist die Hälfte:* $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

   Wie lautet das vollständig gekürzte Ergebnis?

   (a) $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}$

   (b) $\frac{5}{3} \cdot 9 = 15$

   (c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{10}$

   (d) $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{4}$

   (e) $\frac{20}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{6}$

   (f) $\frac{4}{9} \cdot \frac{15}{7} = \frac{20}{21}$

   (g) $\frac{12}{5} \cdot \frac{10}{3} = 8$

   (h) $\frac{25}{12} \cdot \frac{27}{10} = \frac{45}{8}$

   (i) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

7. **Kehrwert.** Die Zahl, welche mit der gegebenen Zahl a multipliziert wird, um das Produkt Eins zu erhalten, wird **Kehrwert** von a genannt und als $\frac{1}{a}$ geschrieben.

   Der Kehrwert eines Bruches ergibt sich, indem Zähler und Nenner vertauscht werden.

   Beispiel. *Der Kehrwert von* 6 *ist* $\frac{1}{6}$*, der Kehrwert von* $\frac{2}{5}$ *ist* $\frac{5}{2}$*.*

   Wie lautet der Kehrwert, der eingesetzt werden muss, damit die Gleichung stimmt?

   (a) $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$

   (b) $\frac{9}{4} \cdot \frac{4}{9} = 1$

   (c) $\frac{1}{8} \cdot 8 = 1$

   (d) $\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} = 1$

(e) $\frac{16}{7} \cdot \frac{7}{16} = 1$

(f) $9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

Repetition. Wir haben bereits einen Begriff kennengelernt, der sehr ähnlich wie der Kehrwert definiert wurde. Was gehört in die Lücken?

Die Zahl, welche zu der gegebenen Zahl a addiert wird, um die Summe **Null** zu erhalten, wird **Gegenzahl** von a genannt und mit $-a$ bezeichnet.

8. **Division.** Brüche werden dividiert, indem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert wird:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Beispiel. $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

Wie lautet das vollständig gekürzte Ergebnis?

(a) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$

(b) $\frac{4}{5} : 8 = \frac{1}{10}$

(c) $\frac{-2}{5} : \frac{3}{10} = \frac{-4}{3}$

(d) $\frac{7}{12} : \frac{5}{9} = \frac{21}{20}$

(e) $\frac{7}{3} : \frac{-1}{6} = -14$

(f) $\frac{15}{4} : \frac{5}{8} = 6$

(g) $\frac{3}{8} : \frac{27}{10} = \frac{5}{36}$

(h) $\frac{-21}{5} : \frac{-14}{3} = \frac{9}{10}$

(i) $2 : \frac{1}{3} = 6$

9. **Berechnung.** Wie lautet das vollständig gekürzte Ergebnis?

(a) $\left(\frac{14}{3} + 2\right) : \frac{11}{9}$

Lösung:

$$= \left(\frac{14}{3} + \frac{6}{3}\right) : \frac{11}{9} = \frac{20}{3} : \frac{11}{9} = \frac{20}{3} \cdot \frac{9}{11} = \boxed{\frac{60}{11}}$$

(b) $5 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

Lösung:

$$= 5 : \left(\frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12}\right) = 5 : \frac{5}{12} = 5 \cdot \frac{12}{5} = \boxed{12}$$

(c) $\frac{1}{3} + 2 : \frac{4}{5}$

Lösung:

$$= \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{2}{6} + \frac{15}{6} = \boxed{\frac{17}{6}}$$

(d) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{6}}$

Lösung:

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{6} = \left(\frac{8}{12} + \frac{9}{12}\right) \cdot 6 = \frac{17}{12} \cdot 6 = \boxed{\frac{17}{2}}$$

(e) $\left(\frac{11}{4} - \frac{7}{5}\right) \cdot \frac{5}{3} + \frac{13}{6}$

Lösung:

$$= \left(\frac{55}{20} - \frac{28}{20}\right) \cdot \frac{5}{3} + \frac{13}{6} = \frac{27}{20} \cdot \frac{5}{3} + \frac{13}{6} = \frac{9}{4} + \frac{13}{6} = \frac{27}{12} + \frac{26}{12} = \boxed{\frac{53}{12}}$$

(f) $\left(\frac{9}{3} - \frac{6}{5}\right)\left(\frac{11}{8} + \frac{1}{2}\right)$

Lösung:

$$= \left(\frac{15}{5} - \frac{6}{5}\right)\left(\frac{11}{8} + \frac{4}{8}\right) = \frac{9}{5} \cdot \frac{15}{8} = \boxed{\frac{27}{8}}$$

10. Berechnung. ★ Wie lautet das vollständig gekürzte Ergebnis?

$$15^2 \cdot \left(\frac{-2}{5} + \left(\frac{-4}{15}\right)\right)^4 - \left(14 \cdot \frac{1}{7 \cdot 3^2} + \frac{290}{9}\right)$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&= 15^2 \cdot \left(\frac{-2\cdot 3}{5\cdot 3} + \left(\frac{-4}{15}\right)\right)^4 - \left(\frac{14}{7\cdot 3^2} + \frac{290}{9}\right) \\
&= 15^2 \cdot \left(\frac{-6}{15} + \left(\frac{-4}{15}\right)\right)^4 - \left(\frac{2}{9} + \frac{290}{9}\right) \\
&= 15^2 \cdot \left(\frac{-10}{15}\right)^4 - \left(\frac{292}{9}\right) \\
&= (3\cdot 5)^2 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^4 - \left(\frac{292}{9}\right) \\
&= 3^2 \cdot 5^2 \cdot \left(\frac{2^4}{3^4}\right) - \left(\frac{292}{9}\right) \\
&= \left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4}{3^4}\right) - \left(\frac{292}{9}\right) \\
&= \left(\frac{5^2 \cdot 2^4}{3^2}\right) - \left(\frac{292}{9}\right) \\
&= \left(\frac{400}{9}\right) - \left(\frac{292}{9}\right) = \frac{108}{9} = \boxed{12}
\end{aligned}
$$

11. Ordnen. Wie werden diese Brüche in aufsteigender Reihenfolge angeordnet?

$$\frac{-17}{17} \qquad \frac{18}{17} \qquad \frac{-1}{17} \qquad \frac{16}{17} \qquad \frac{-30}{17}$$

Lösung:

$$\frac{-30}{17} < \frac{-17}{17} < \frac{-1}{17} < \frac{16}{17} < \frac{18}{17}$$

12. Ordnen. Wie werden diese Brüche in aufsteigender Reihenfolge angeordnet?

$$\frac{7}{15} \qquad \frac{-7}{4} \qquad \frac{-7}{10} \qquad \frac{7}{3} \qquad \frac{7}{97}$$

Lösung:

$$\frac{-7}{4} < \frac{-7}{10} < \frac{7}{97} < \frac{7}{15} < \frac{7}{3}$$

13. Ordnen. Wie werden diese Brüche in aufsteigender Reihenfolge angeordnet?

$$\frac{4}{20} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{3}{12}$$

Lösung: Zunächst werden die Brüche gleichnamig gemacht, dann können sie nach Zähler aufsteigend geordnet werden.

$$\frac{4\cdot 3}{20\cdot 3}=\frac{12}{60},\quad \frac{1\cdot 10}{6\cdot 10}=\frac{10}{60},\quad \frac{3\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{15}{60} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{6}<\frac{4}{20}<\frac{3}{12}}$$

14. Vergleich. Welcher Vergleichsoperator ($<$, $>$ oder $=$) muss eingesetzt werden, damit eine wahre Aussage entsteht?

(a) $\frac{-4}{6} \;=\; \frac{4}{-6}$

(b) $\frac{-12}{67} \;>\; \frac{-12}{19}$

(c) $\frac{-4}{98} \;>\; \frac{-8}{98}$

(d) $\frac{13}{18} \;>\; \frac{12}{-17}$

(e) $\frac{-4}{5} \;>\; \frac{-8}{9}$

(f) $\frac{-6}{-8} \;=\; \frac{3}{4}$