Potenzen

1. Negativer Exponent.

Wir überlegen uns, was passiert, wenn der Exponent einer Potenz jeweils um Eins verringert wird:

		-1	-1	-1	-1	-1	-1
Exponent	3	2	1	0	-1	-2	-3
Potenz	5^3	5^2	5^1	5^0	5^{-1}	5^{-2}	5^{-3}
Ergebnis	125	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$
		$:5$	$:5$	$:5$	$:5$	$:5$	$:5$

Offenbar wird das Ergebnis jeweils durch die Basis dividiert. Das ergibt Sinn, ein um Eins kleinerer Exponent bedeutet ja, dass die Basis einmal weniger mit sich selbst multipliziert wird.

Wird diese Regel bei der Potenz 5^0 weiter angewendet, dann entsteht die Potenz 5^{-1}. Deren Ergebnis ist das Ergebnis von 5^0 dividiert durch 5, also $\frac{1}{5}$. Wird dies so fortgesetzt, können die Ergebnisse für alle negativen Exponenten bestimmt werden.

Negativer Exponent. Die Potenz einer Zahl a mit einem negativen Exponenten $-n$ ergibt den Kehrwert der Potenz mit der Gegenzahl n im Exponenten.

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} = \frac{1}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{mal}}}$$

Beispiel. $3^{-1} = \frac{1}{3}$ $\qquad 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ $\qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

Wie wird die Zahl als vollständig gekürzter Bruch dargestellt?

(a) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

(b) $4^{-1} = \frac{1}{4}$

(c) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

(d) $10^{-1} = \frac{1}{10}$

(e) $9 \cdot 3^{-2} = \frac{9}{9} = 1$

(f) $2^{-3} = \frac{1}{8}$

(g) $10 \cdot 10^{-4} = \frac{10}{10'000} = \frac{1}{1000}$

(h) $5^{-3} = \frac{1}{125}$

(i) $8 \cdot 2^{-5} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

2. **Bruch als Potenz.** Wie wird der Bruch als Potenz mit möglichst kleiner Basis dargestellt?

(a) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \boxed{2^{-3}}$

(b) $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = \boxed{3^{-3}}$

(c) $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = \boxed{10^{-2}}$

(d) $\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = \boxed{5^{-3}}$

(e) $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = \boxed{10^{-3}}$

(f) $\frac{1}{49} = \frac{1}{7^2} = \boxed{7^{-2}}$

3. **Positiver Exponent.** Wie wird der Term mit nur positiven Exponenten dargestellt?

(a) $3x^{-5} = \frac{3}{x^5}$

(b) $a^{-1}b^2 = \frac{b^2}{a}$

(c) $5x^3y^{-2} = \frac{5x^3}{y^2}$

(d) $a^3b^{-4}c^{-1} = \frac{a^3}{b^4c}$

(e) $e^{-3}f^5g^{-2} = \frac{f^5}{e^3g^2}$

(f) $3^{-2}x^4y^2z^{-1} = \frac{x^4y^2}{9z}$

4. **Negative Basis.** Bei einer Potenz mit negativer Basis hängt das Vorzeichen des Ergebnisses vom Exponenten ab: Ist der Exponent gerade, können alle negativen Faktoren paarweise multipliziert werden, und das Ergebnis ist positiv. Ist der Exponent ungerade, bleibt ein negativer Faktor übrig, und das Ergebnis ist negativ:

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -a^n & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Hinweis: Eine negative Basis kann an den Klammern erkannt werden. Wenn keine Klammern vorhanden sind, wird zuerst die Potenz berechnet und erst anschliessend wird die Gegenzahl bestimmt.

Beispiel.

$$(-5)^2 = (-5)\cdot(-5) = 25 \qquad -5^2 = -(5\cdot 5) = -25$$
$$(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125 \qquad -5^3 = -(5\cdot 5\cdot 5) = -125$$

Wie lautet das Ergebnis?

(a) $(-2)^2 = 2^2 = \boxed{4}$

(b) $(-3)^3 = -3^3 = \boxed{-27}$

(c) $(-1)^5 = -1^5 = \boxed{-1}$

(d) $(-5)^4 = 5^4 = \boxed{625}$

(e) $(-2)^5 = -2^5 = \boxed{-32}$

(f) $(-1)^8 = 1^8 = \boxed{1}$

(g) $(-3)^4 = 3^4 = \boxed{81}$

(h) $(-2)^6 = 2^6 = \boxed{64}$

(i) $(-5)^0 = 5^0 = \boxed{1}$

5. **Negative Basis mit Variablen.** Wie wird der Term möglichst einfach mit nur positiver Basis und Exponenten dargestellt?

(a) $(-a)^5\cdot(-a)^2 = (-a)^{5+2} = (-a)^7 = \boxed{-a^7}$

(b) $(-b)^2\cdot(-b)^3 = (-b)^{2+3} = (-b)^5 = \boxed{-b^5}$

(c) $(-c)^3\cdot(-c)^5 = (-c)^{3+5} = (-c)^8 = \boxed{c^8}$

(d) $(-d)^6\cdot(-d)^8 = (-d)^{6+8} = (-d)^{14} = \boxed{d^{14}}$

(e) $(-e)^4 : (-e)^3 = (-e)^{4-3} = (-e)^1 = \boxed{-e}$

(f) $(-f)^4 : (-f)^5 = (-f)^{4-5} = (-f)^{-1} = \boxed{\frac{-1}{f}}$

6. **Multiplikation mit gleicher Basis.** Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Exponenten addiert werden:

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

Wie lautet das Ergebnis als vollständig gekürzter Bruch?

(a) $3^{-5} \cdot 3^7 = 3^{-5+7} = 3^2 = 9$

(b) $5^3 \cdot 5^0 \cdot 5^{-5} \cdot 5 = 5^{3+0-5+1} = \boxed{5^{-1} = \frac{1}{5}}$

(c) $(-2)^2 \cdot (-2)^{-5} = (-2)^{2-5} = (-2)^{-3} = -2^{-3} = \frac{-1}{2^3} = \boxed{\frac{-1}{8}}$

7. **Multiplikation mit gleicher Basis mit Variablen.** Wie kann der Term möglichst einfach nur mit positiven Exponenten dargestellt werden?

(a) $a^5 \cdot a^{-3} = \boxed{a^2}$

(b) $x^2 \cdot x^{-5} = \boxed{\frac{1}{x^3}}$

(c) $y^{-2} \cdot y^{-6} = \boxed{\frac{1}{y^8}}$

(d) $b^{-2} \cdot b^3 \cdot b^{-7} = \boxed{\frac{1}{b^6}}$

(e) $a^3 \cdot b^{-2} \cdot a^{-4} \cdot b^5 = \boxed{\frac{b^3}{a}}$

(f) $x^{-5} \cdot y^3 \cdot y^{-8} \cdot x^2 = \boxed{\frac{1}{x^3 y^5}}$

8. **Division mit gleicher Basis.** Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Exponenten subtrahiert werden:

$$\frac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$$

Wie lautet das Ergebnis als vollständig gekürzter Bruch?

(a) $\frac{4^5}{4^7} = 4^{5-7} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \boxed{\frac{1}{16}}$

(b) $\frac{(-3)^{29}}{(-3)^{30}} = (-3)^{29-30} = (-3)^{-1} = \boxed{\frac{-1}{3}}$

(c) $\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2 = \boxed{100}$

9. **Division mit gleicher Basis mit Variablen.** Wie kann der Term möglichst einfach nur mit positiven Exponenten dargestellt werden?

(a) $\frac{x^{10}}{x^3} = x^{10-3} = x^7$

(b) $\frac{b^{-3}}{b^6} = b^{-3-6} = b^{-9} = \frac{1}{b^9}$

(c) $\frac{a^7}{a^{-2}} = a^{7-(-2)} = a^9$

(d) $\frac{y^4}{y^7} = y^{4-7} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$

(e) $\frac{k^3}{k^6 \cdot k^{-2}} = k^{3-(6-2)} = k^{-1} = \frac{1}{k}$

(f) $\frac{m^{-3}}{m^{-8}} = m^{-3-(-8)} = m^5$

(g) $\frac{a^3b^4c^2}{a^2b^5c^9} = \boxed{\frac{a}{bc^7}}$

(h) $\frac{18a^5b^7}{54ab^9} = \boxed{\frac{a^4}{3b^2}}$

(i) $\frac{x^{10}y^9}{x^8y^7} = \boxed{x^2y^2}$

10. **Potenz von Potenzen.** Potenzen werden potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$\left(a^k\right)^m = a^{km}$$

Wie kann der Term möglichst einfach nur mit positiven Exponenten dargestellt werden?

(a) $\left(x^2\right)^{-3} = x^{2\cdot(-3)} = x^{-6} = \boxed{\frac{1}{x^6}}$

(b) $\left(a^{-1}\right)^5 = a^{(-1)\cdot 5} = a^{-5} = \boxed{\frac{1}{a^5}}$

(c) $\left(n^{-2}\right)^{-3} = n^{(-2)\cdot(-3)} = \boxed{n^6}$

(d) $3(xy)^{-1} = \boxed{\frac{3}{xy}}$

(e) $4\left(x^2y^{-3}\right)^{-2} = 4x^{2\cdot(-2)}y^{(-3)\cdot(-2)} = 4x^{-4}y^6 = \boxed{\frac{4y^6}{x^4}}$

(f) $\left(2xy^{-4}\right)^{-3} = 2^{-3}x^{-3}y^{(-4)\cdot(-3)} = 2^{-3}x^{-3}y^{12} = \boxed{\frac{y^{12}}{8x^3}}$

(g) $\left(a^{-2}b^2\right)^3 \cdot a^4 = a^{(-2)\cdot 3}b^{2\cdot 3} \cdot a^4 = a^{-6}b^6 \cdot a^4 = \boxed{\frac{b^6}{a^2}}$

(h) $\left(p^3q^{-1}\right)^{-4} : q^5 = p^{3\cdot(-4)}q^{(-1)\cdot(-4)} \cdot q^{-5} = p^{-12}q^{4-5} = \boxed{\frac{1}{p^{12}q}}$

(i) $\left(x^2y^{-2}\right)^3\left(xy^{-3}\right)^{-2} = x^6y^{-6} \cdot x^{-2}y^6 = \boxed{x^4}$

11. Potenzen. Potenziere und schreibe das Ergebnis mit positivem Exponenten.

(a) $\left(-a^{-2}bc^4\right)^5 = -\left(a^{-2}bc^4\right)^5 = -a^{-2\cdot 5}b^{1\cdot 5}c^{4\cdot 5} = -a^{-10}b^5c^{20} = \boxed{\frac{-b^5c^{20}}{a^{10}}}$

(b) $\left(5a^3b^9c^0\right)^2 = 5^2a^{3\cdot 2}b^{9\cdot 2} \cdot 1 = \boxed{25a^6b^{18}}$

(c) $-\left(3a^{-3}b^4c^6\right)^{-2} = -3^{-2}a^{-3\cdot(-2)}b^{4\cdot(-2)}c^{6\cdot(-2)} = -3^{-2}a^6b^{-8}c^{-12} = \boxed{\frac{-a^6}{9b^8c^{12}}}$

12. Vereinfachen. Vereinfache und schreibe das Ergebnis mit positivem Exponenten.

(a) $\frac{a^2b^4}{x^4y^{-1}} : \frac{a^3b}{x^3y^{-2}}$

Lösung:

$$\frac{a^2b^4}{x^4y^{-1}} : \frac{a^3b}{x^3y^{-2}} = \frac{a^2b^4}{x^4y^{-1}} \cdot \frac{x^3y^{-2}}{a^3b} = \frac{a^2b^4x^3y}{a^3bx^4y^2} = \boxed{\frac{b^3}{axy}}$$

(b) $\left(\frac{24x^3y}{25a^3b} : \frac{8xy^2}{5a^2}\right) \cdot \frac{5a}{3x}$

Lösung:

$$\left(\frac{24x^3y}{25a^3b} : \frac{8xy^2}{5a^2}\right) \cdot \frac{5a}{3x} = \frac{24x^3y}{25a^3b} \cdot \frac{5a^2}{8xy^2} \cdot \frac{5a}{3x} = \frac{24 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a^3x^3y}{25 \cdot 8 \cdot 3 \cdot a^3bx^2y^2} = \boxed{\frac{x}{by}}$$

(c) $\left(\frac{6x^2}{15y}\right)^2 \cdot \left(\frac{-4x^3}{3y^3}\right)^3$

Lösung:

$$\left(\frac{6x^2}{15y}\right)^2 \cdot \left(\frac{-4x^3}{3y^3}\right)^3 = \frac{6^2x^4}{15^2y^2} \cdot \left(\frac{-4^3x^9}{3^3y^9}\right) = \frac{-3^2 \cdot 2^2 \cdot 4^3 \cdot x^{13}}{15^2 \cdot 3^3 \cdot y^{11}} = \boxed{\frac{-256x^{13}}{675y^{11}}}$$

(d) $\left(\frac{x^8y^7}{a^3b^{-2}}\right)^{-2} : \left(\frac{\left(a^{-5}x^7y\right)^4}{b^{-10}} : \frac{a^9b^{-2}}{(x^4y^3)^{-3}}\right)$

Lösung:

$$\left(\frac{x^8y^7}{a^3b^{-2}}\right)^{-2} : \left(\frac{\left(a^{-5}x^7y\right)^4}{b^{-10}} : \frac{a^9b^{-2}}{(x^4y^3)^{-3}}\right)$$

$$= \frac{x^{-16}y^{-14}}{a^{-6}b^4} : \left(\frac{\left(a^{-5}x^7y\right)^4}{b^{-10}} \cdot \frac{\left(x^4y^3\right)^{-3}}{a^9b^{-2}}\right)$$

$$= \frac{a^6}{b^4x^{16}y^{14}} : \left(\frac{a^{-20}x^{28}y^4}{b^{-10}} \cdot \frac{x^{-12}y^{-9}}{a^9b^{-2}}\right)$$

$$= \frac{a^6}{b^4x^{16}y^{14}} \cdot \frac{b^{-10}}{a^{-20}x^{28}y^4} \cdot \frac{a^9b^{-2}}{x^{-12}y^{-9}} = \boxed{\frac{a^{35}}{b^{16}x^{32}y^9}}$$

13. Potenz als Basis. ★ Um Potenzen mit unterschiedlichen Basen zu vereinfachen, wird zuerst eine gemeinsame Basis hergestellt, indem jede Basis als Potenz einer kleineren Zahl geschrieben wird. Anschliessend wird das Potenzgesetz $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ angewendet und schliesslich können Potenzen mit gleicher Basis zusammengefasst werden.

Beispiel. $3^{-3} \cdot 9^2 = 3^{-3} \cdot \left(3^2\right)^2 = 3^{-3} \cdot 3^{2 \cdot 2} = 3^{-3} \cdot 3^4 = 3^{-3+4} = 3^1 = 3$

Schreibe die Basis als Potenz und vereinfache.

(a) $2^3 \cdot 4^2$

Lösung:

$$2^3 \cdot 4^2 = 2^3 \cdot \left(2^2\right)^2 = 2^3 \cdot 2^{2 \cdot 2} = 2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = \boxed{2^7 = 128}$$

(b) $\dfrac{10^5}{100^3}$

Lösung:

$$\frac{10^5}{100^3} = \frac{10^5}{(10^2)^3} = \frac{10^5}{10^{2 \cdot 3}} = \frac{10^5}{10^6} = 10^{5-6} = 10^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

(c) $\dfrac{27^4}{3^{10}}$

Lösung:

$$\frac{27^4}{3^{10}} = \frac{\left(3^3\right)^4}{3^{10}} = \frac{3^{3 \cdot 4}}{3^{10}} = \frac{3^{12}}{3^{10}} = 3^{12-10} = 3^2 = \boxed{9}$$

14. Potenzen von Potenzen. ★ Vereinfache, indem du die gleiche Basis herstellst, und rechne anschliessend aus.

(a) $\dfrac{\left(2^2\right)^3}{2^5}$

Lösung:

$$\frac{\left(2^2\right)^3}{2^5} = \frac{2^{2 \cdot 3}}{2^5} = \frac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = \boxed{2}$$

(b) $\dfrac{\left(3^3\right)^5}{\left(3^2\right)^6}$

Lösung:

$$\frac{\left(3^3\right)^5}{\left(3^2\right)^6} = \frac{3^{3 \cdot 5}}{3^{2 \cdot 6}} = \frac{3^{15}}{3^{12}} = 3^{15-12} = 3^3 = \boxed{27}$$

(c) $\frac{4^7}{2^{10}}$

Lösung:

$$\frac{4^7}{2^{10}} = \frac{\left(2^2\right)^7}{2^{10}} = \frac{2^{2\cdot 7}}{2^{10}} = \frac{2^{14}}{2^{10}} = 2^{14-10} = 2^4 = \boxed{16}$$

(d) $\frac{5^8}{25^3}$

Lösung:

$$\frac{5^8}{25^3} = \frac{5^8}{\left(5^2\right)^3} = \frac{5^8}{5^{2\cdot 3}} = \frac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2 = \boxed{25}$$

(e) $\frac{9^7}{27^4}$

Lösung:

$$\frac{9^7}{27^4} = \frac{\left(3^2\right)^7}{\left(3^3\right)^4} = \frac{3^{2\cdot 7}}{3^{3\cdot 4}} = \frac{3^{14}}{3^{12}} = 3^{14-12} = 3^2 = \boxed{9}$$

(f) $\frac{4^4 \cdot 27^2}{8^2 \cdot 9^3}$

Lösung:

$$\frac{4^4 \cdot 27^2}{8^2 \cdot 9^3} = \frac{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(3^3\right)^2}{\left(2^3\right)^2 \cdot \left(3^2\right)^3} = \frac{2^{2\cdot 4} \cdot 3^{3\cdot 2}}{2^{3\cdot 2} \cdot 3^{2\cdot 3}} = \frac{2^8 \cdot 3^6}{2^6 \cdot 3^6} = 2^{8-6} = \boxed{4}$$

(g) $\left(-3^3\right)^2 : 9^2$

Lösung:

$$\left(-3^3\right)^2 : 9^2 = \frac{\left(3^3\right)^2}{\left(3^2\right)^2} = \frac{3^{3\cdot 2}}{3^{2\cdot 2}} = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = \boxed{9}$$

(h) $\left(-25^2\right)^3 : (-5)^9$

Lösung:

$$\left(-25^2\right)^3 : (-5)^9 = \frac{-\left(25^2\right)^3}{-5^9} = \frac{\left(\left(5^2\right)^2\right)^3}{5^9} = \frac{5^{2\cdot 2\cdot 3}}{5^9} = \frac{5^{12}}{5^9} = 5^{12-9} = 5^3 = \boxed{125}$$

(i) $\left[(-7)^2\right]^5 : (-49)^4$

Lösung:

$$\left[(-7)^2\right]^5 : (-49)^4 = \frac{\left(7^2\right)^5}{\left(7^2\right)^4} = \frac{7^{2\cdot 5}}{7^{2\cdot 4}} = \frac{7^{10}}{7^8} = 7^{10-8} = 7^2 = \boxed{49}$$

(j) $\left(-4^2 \cdot 2^4\right) : 8^2$

Lösung:

$$\left(-4^2 \cdot 2^4\right) : 8^2 = \frac{-\left(2^2\right)^2 \cdot 2^4}{\left(2^3\right)^2} = \frac{-2^{2\cdot 2} \cdot 2^4}{2^{3\cdot 2}} = \frac{-2^4 \cdot 2^4}{2^6} = \frac{-2^8}{2^6} = -2^{8-6} = -2^2 = \boxed{-4}$$

(k) $\dfrac{32^4 \cdot 25^5}{16^3 \cdot 5^7}$

Lösung:

$$\frac{32^4 \cdot 25^5}{16^3 \cdot 5^7} = \frac{\left(2^5\right)^4 \cdot \left(5^2\right)^5}{\left(2^4\right)^3 \cdot 5^7} = \frac{2^{4\cdot 5} \cdot 5^{5\cdot 2}}{2^{4\cdot 3} \cdot 5^7} = \frac{2^{20} \cdot 5^{10}}{2^{12} \cdot 5^7}$$

$$= 2^{20-12} \cdot 5^{10-7} = 2^8 \cdot 5^3 = 256 \cdot 125 = \boxed{32'000}$$

(l) $\dfrac{(-27)^3 \cdot 25^2}{-3^8 \cdot (-5^3)}$

Lösung:

$$\frac{(-27)^3 \cdot 25^2}{-3^8 \cdot (-5^3)} = \frac{-27^3 \cdot 25^2}{3^8 \cdot 5^3} = \frac{-\left(3^3\right)^3 \left(5^2\right)^2}{3^8 \cdot 5^3} = \frac{-3^{3\cdot 3} \cdot 5^{2\cdot 2}}{3^8 \cdot 5^3} = \frac{-3^9 \cdot 5^4}{3^8 \cdot 5^3}$$

$$= -3^{9-8} \cdot 5^{4-3} = -3 \cdot 5 = \boxed{-15}$$

15. Gesetz begründen. ★ Jedes mathematische Gesetz muss ausgehend von bekannten Annahmen und Gesetzen bewiesen werden können. Um ein Gesetz in Form einer Gleichung zu beweisen, muss die linke Seite schrittweise in die rechte Seite umgeformt werden können.

Beispiel. *Das Distributivgesetz $a(b+c) = ab + ac$ kann für $a = 3$ wie folgt begründet werden (Für einen vollständigen Beweis müsste dies für alle Zahlen a gezeigt werden).*

$3(b+c) =$	
$= (b+c) + (b+c) + (b+c)$	*Definition der Multiplikation*
$= b + c + b + c + b + c$	*Assoziativgesetz*
$= b + b + b + c + c + c$	*Kommutativgesetz*
$= (b+b+b) + (c+c+c)$	*Assoziativgesetz*
$= 3b + 3c$	*Definition der Multiplikation*

Wie können die folgenden Potenzgesetze auf analoge Weise begründet werden?

(a) $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$

(b) $\left(a^k\right)^m = a^{km}$

Lösung: