Bruchterme

1. **Definitionsmenge.** Wie lautet die Definitionsmenge D für die Grundmenge $\mathbb{Q}$?

(a) $\dfrac{x+1}{3}$

Lösung: Die Variable kommt nur im Zähler vor. Mit dem konstanten Nenner 3 ist der Term für alle x definiert.

$$\frac{x+1}{3} = \frac{1}{3} \cdot (x+1) \qquad D_x = \boxed{\mathbb{Q}}$$

(b) $\dfrac{3}{x}$

Lösung:

$$x = 0 \qquad D_x = \boxed{\mathbb{Q} \setminus \{0\}}$$

(c) $\dfrac{5}{x+1}$

Lösung:

$$x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \qquad D_x = \boxed{\mathbb{Q} \setminus \{-1\}}$$

(d) $\dfrac{7}{2t-6}$

Lösung:

$$2t - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2t = 6 \quad \Longrightarrow \quad t = 3 \qquad D_t = \boxed{\mathbb{Q} \setminus \{3\}}$$

(e) $\dfrac{x}{x(x-5)}$

Lösung: Achtung: Der Term wird **vor** dem Kürzen betrachtet. Beide Faktoren des Nenners dürfen nicht Null werden.

$$x \cdot (x-5) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 5 \qquad D_x = \boxed{\mathbb{Q} \setminus \{0;\ 5\}}$$

(f) $\dfrac{3x+1}{x^2-9}$

Lösung: Der Nenner wird mit der dritten binomischen Formel faktorisiert.

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -3 \quad \text{oder} \quad x = 3$$

$$D_x = \boxed{\mathbb{Q} \setminus \{-3;\ 3\}}$$

(g) $\dfrac{x+2}{x^2+1}$

Lösung: Eine Quadratzahl ist immer grösser oder gleich Null. Der Nenner wird daher für kein x Null.

$$x^2+1 \geq 1 > 0 \qquad D_x = \boxed{\mathbb{Q}}$$

(h) $\dfrac{2}{4t-t^2}$

Lösung: Im Nenner wird t ausgeklammert.

$$4t-t^2=0 \quad \Longrightarrow \quad t\cdot(4-t)=0 \quad \Longrightarrow \quad t=0 \text{ oder } t=4 \qquad D_t = \boxed{\mathbb{Q}\setminus\{0;\,4\}}$$

(i) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x+2}$

Lösung: Die Definitionsmenge der Summe enthält nur Werte, die in **allen** beteiligten Bruchtermen erlaubt sind.

$$x=0 \text{ oder } x+2=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-2 \qquad D_x = \boxed{\mathbb{Q}\setminus\{-2;\,0\}}$$

2. Kürzen. Wie lautet der vollständig gekürzte Term?

(a) $\dfrac{12d}{9}$

Lösung:

$$\frac{12d}{9} = \frac{\cancel{3}\cdot 4\cdot d}{\cancel{3}\cdot 3} = \boxed{\frac{4d}{3}}$$

(b) $\dfrac{25ac}{5c}$

Lösung:

$$\frac{25ac}{5c} = \frac{\cancel{5}\cdot 5\cdot a\cdot \cancel{c}}{\cancel{5}\cdot \cancel{c}} = \boxed{5a}$$

(c) $\dfrac{39a}{65b}$

Lösung:

$$\frac{39a}{65b} = \frac{\cancel{13}\cdot 3\cdot a}{\cancel{13}\cdot 5\cdot b} = \boxed{\frac{3a}{5b}}$$

(d) $\dfrac{ef^2g}{4fg^2}$

Lösung:

$$\frac{ef^2g}{4fg^2} = \frac{e \cdot \cancel{f} \cdot f \cdot \cancel{g}}{4 \cdot \cancel{f} \cdot \cancel{g} \cdot g} = \boxed{\frac{ef}{4g}}$$

(e) $\dfrac{25}{5x+10}$

Lösung: Im Nenner wird 5 ausgeklammert und gekürzt.

$$\frac{25}{5x+10} = \frac{\cancel{5} \cdot 5}{\cancel{5}(x+2)} = \boxed{\frac{5}{x+2}}$$

(f) $\dfrac{4(m+n)}{7(m+n)}$

Lösung:

$$\frac{4(m+n)}{7(m+n)} = \frac{4 \cdot \cancel{(m+n)}}{7 \cdot \cancel{(m+n)}} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

(g) $\dfrac{(4r+s)^2}{(4r+s)}$

Lösung:

$$\frac{(4r+s)^2}{(4r+s)} = \frac{\cancel{(4r+s)} \cdot (4r+s)}{\cancel{(4r+s)}} = \boxed{4r+s}$$

(h) $\dfrac{18(e+3f)}{24(3f+e)}$

Lösung:

$$\frac{18(e+3f)}{24(3f+e)} = \frac{\cancel{6} \cdot 3 \cdot \cancel{(e+3f)}}{\cancel{6} \cdot 4 \cdot \cancel{(3f+e)}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

(i) $\dfrac{24a^2bc^2}{56abc}$

Lösung:

$$\frac{24a^2bc^2}{56abc} = \frac{\cancel{8} \cdot 3 \cdot \cancel{a}\cancel{b}\cancel{c}c}{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{a}\cancel{b}\cancel{c}} = \boxed{\frac{3ac}{7}}$$

(j) $\dfrac{-72uv^3w^6}{-60uv^3w^5}$

Lösung:

$$\frac{-72uv^3w^6}{-60uv^3w^5} = \frac{\cancel{-12} \cdot 6 \cdot \cancel{u}\cancel{v^3}\cancel{w^5}w}{\cancel{-12} \cdot 5 \cdot \cancel{u}\cancel{v^3}\cancel{w^5}} = \boxed{\frac{6w}{5}}$$

(k) $\dfrac{6f^4g^3h^5}{2f^3gh^2}$

Lösung:

$$\frac{6f^4g^3h^5}{2f^3gh^2} = \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{f^3}f\cancel{g}g^2\cancel{h^2}h^3}{\cancel{2} \cdot \cancel{f^3}\cancel{g}\cancel{h^2}} = \boxed{3fg^2h^3}$$

(l) $\dfrac{24x - 16xy}{33a - 22ay}$

Lösung: Zähler und Nenner werden faktorisiert ($8x$ bzw. $11a$ ausgeklammert), dann mit $(3 - 2y)$ gekürzt.

$$\frac{24x - 16xy}{33a - 22ay} = \frac{8x(3 - 2y)}{11a(3 - 2y)} = \boxed{\frac{8x}{11a}}$$

3. Kürzen. Wie lautet der vollständig gekürzte Term?

(a) $\dfrac{a^2 - b^2}{3a + 3b}$

Lösung: Der Zähler wird mit der dritten binomischen Formel faktorisiert, im Nenner wird 3 ausgeklammert. Nun wird mit dem Faktor $(a + b)$ gekürzt.

$$\frac{a^2 - b^2}{3a + 3b} = \frac{(a + b)(a - b)}{3(a + b)} = \boxed{\frac{a - b}{3}}$$

(b) $\dfrac{6u - 8v}{9u^2 - 16v^2}$

Lösung: Im Zähler wird 2 ausgeklammert, im Nenner mit der dritten binomischen Formel faktorisiert. Danach wird mit dem Faktor $(3u - 4v)$ gekürzt.

$$\frac{6u - 8v}{9u^2 - 16v^2} = \frac{2(3u - 4v)}{(3u + 4v)(3u - 4v)} = \boxed{\frac{2}{3u + 4v}}$$

(c) $\dfrac{n^3 - n}{n^3 + n^2}$

Lösung: Zuerst wird im Zähler n ausgeklammert, im Nenner n^2. Nun kann im Zähler $(n^2 - 1)$ mit der dritten binomischen Formel faktorisiert werden. Danach kann mit n

und $(n-1)$ gekürzt werden.

$$\frac{n^3-n}{n^3+n^2} = \frac{n\left(n^2-1\right)}{n^2(n+1)} = \frac{n(n+1)(n-1)}{n^2(n+1)} = \boxed{\frac{n-1}{n}}$$

(d) $\dfrac{u^2+2uv+v^2}{4u+4v}$

Lösung: Der Zähler wird mit der ersten binomischen Formel faktorisiert, im Nenner wird 4 ausgeklammert. Nun kann mit $(u+v)$ gekürzt werden.

$$\frac{u^2+2uv+v^2}{4u+4v} = \frac{(u+v)^2}{4(u+v)} = \boxed{\frac{u+v}{4}}$$

(e) $\dfrac{2ac-5bc}{4a^2-20ab+25b^2}$

Lösung: Im Zähler wird c ausgeklammert, der Nenner wird mit der zweiten binomischen Formel faktorisiert. Nun kann mit $(2a-5b)$ gekürzt werden.

$$\frac{2ac-5bc}{4a^2-20ab+25b^2} = \frac{c(2a-5b)}{(2a-5b)^2} = \boxed{\frac{c}{2a-5b}}$$

(f) $\dfrac{w^3+2w^2+w}{wz+z}$

Lösung: Im Zähler wird w ausgeklammert, im Nenner z. Im Zähler kann w^2+2w+1 mit der ersten binomischen Formel faktorisiert werden. Nun kann mit dem Faktor $(w+1)$ gekürzt werden.

$$\frac{w^3+2w^2+w}{wz+z} = \frac{w(w^2+2w+1)}{z(w+1)} = \frac{w(w+1)^2}{z(w+1)} = \boxed{\frac{w(w+1)}{z}}$$

(g) $\dfrac{a-b}{b-a}$

Lösung: Im Zähler wird -1 ausgeklammert, dann wird mit $(b-a)$ gekürzt.

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{(-1)(b-a)}{b-a} = \boxed{-1}$$

(h) $\dfrac{3z-3y}{4y-4z}$

Lösung: Im Zähler wird -3 ausgeklammert, im Nenner 4. Dann wird mit $(y-z)$ gekürzt.

$$\frac{3z-3y}{4y-4z} = \frac{(-3)(y-z)}{4(y-z)} = \boxed{\frac{-3}{4}}$$

4. Multiplizieren. Wie lautet der vollständig gekürzte Term?

(a) $\frac{4a}{x} \cdot \frac{-b}{2x}$

Lösung:

$$\frac{4a}{x} \cdot \frac{-b}{2x} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot a \cdot (-b)}{\cancel{2} \cdot x^2} = \boxed{\frac{-2ab}{x^2}}$$

(b) $\frac{4(a+b)^2}{5x} \cdot \frac{25x^2}{a+b}$

Lösung:

$$\frac{4(a+b)^2}{5x} \cdot \frac{25x^2}{a+b} = \frac{4 \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{(a+b)} \cdot (a+b)}{\cancel{5} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(a+b)}} = \boxed{20x(a+b)}$$

(c) $6ab \cdot \frac{9a}{4b}$

Lösung:

$$6ab \cdot \frac{9a}{4b} = \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 9 \cdot a^2 \cancel{b}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{b}} = \boxed{\frac{27a^2}{2}}$$

(d) $\frac{8a}{3b} \cdot \frac{9bc}{4a}$

Lösung:

$$\frac{8a}{3b} \cdot \frac{9bc}{4a} = \frac{\cancel{4} \cdot 2\cancel{a} \cdot \cancel{3} \cdot 3\cancel{b}c}{\cancel{3}\cancel{b} \cdot \cancel{4}\cancel{a}} = \boxed{6c}$$

(e) $\frac{-xy^2}{35z^3} \cdot \frac{7z^2}{x^2y^2}$

Lösung:

$$\frac{-xy^2}{35z^3} \cdot \frac{7z^2}{x^2y^2} = \frac{-\cancel{7} \cdot x \cdot y^2 \cdot z^2}{\cancel{7} \cdot 5 \cdot x^2y^2z^3} = \boxed{\frac{-1}{5xz}}$$

(f) $\frac{-18u^2w}{65v^4} \cdot \frac{-26v}{27uw^3}$

Lösung:

$$\frac{-18u^2w}{65v^4} \cdot \frac{-26v}{27uw^3} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{13} \cdot u^2vw}{5 \cdot \cancel{13} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot uv^4w^3} = \boxed{\frac{4u}{15v^3w^2}}$$

(g) $\dfrac{17r^4s^3}{54t^5} \cdot \dfrac{24st^2}{85r^2}$

Lösung:

$$\frac{17r^4s^3}{54t^5} \cdot \frac{24st^2}{85r^2} = \frac{\cancel{17} \cdot 4 \cdot \cancel{6} \cdot r^4s^4t^2}{9 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{17} \cdot r^2t^5} = \boxed{\frac{4r^2s^4}{45t^3}}$$

(h) $\dfrac{m-n}{3m} \cdot \dfrac{5m}{2m-2n}$

Lösung: Im Nenner des zweiten Faktors wird 2 ausgeklammert. Es wird mit m und $(m-n)$ gekürzt.

$$\frac{m-n}{3m} \cdot \frac{5m}{2m-2n} = \frac{(m-n) \cdot 5m}{3m \cdot 2(m-n)} = \frac{5m(m-n)}{6m(m-n)} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

(i) $\dfrac{d-1}{18d} \cdot \dfrac{12d^2}{1-d}$

Lösung: Im ersten Zähler $d-1$ wird (-1) ausgeklammert. Es wird mit den Faktoren 6, $(1-d)$ und d gekürzt.

$$\frac{d-1}{18d} \cdot \frac{12d^2}{1-d} = \frac{(-1)(1-d) \cdot 12d^2}{18d \cdot (1-d)} = \boxed{\frac{-2d}{3}}$$

(j) $\dfrac{7r^2s}{12\,(r-s)} \cdot \dfrac{(2s-2r)^2}{21rs^2}$

Lösung: Im zweiten Zähler wird 2^2 ausgeklammert, im ersten Nenner wird bei $r-s$ der Faktor (-1) ausgeklammert. Es kann mit r, s, $(s-r)$ sowie 7 und 4 gekürzt werden.

$$\begin{aligned}\frac{7r^2s}{12\,(r-s)} \cdot \frac{(2s-2r)^2}{21rs^2} &= \frac{7r^2s \cdot 2^2(s-r)^2}{12(-1)(s-r) \cdot 21rs^2} \\ &= \frac{r(s-r)}{3 \cdot (-1) \cdot 3s} = \boxed{\frac{-r(s-r)}{9s} = \frac{r(r-s)}{9s}}\end{aligned}$$

5. Dividieren. Wie lautet der vollständig gekürzte Term?

(a) $\dfrac{7u^3}{9v^2} : \left(21u^2v\right)$

Lösung:

$$\frac{7u^3}{9v^2} : \left(21u^2v\right) = \frac{7u^3}{9v^2} \cdot \frac{1}{21u^2v} = \frac{\cancel{7} \cdot u^3}{9 \cdot 3 \cdot \cancel{7} \cdot u^2v^3} = \boxed{\frac{u}{27v^3}}$$

(b) $\dfrac{5km}{6} : \dfrac{3k}{2m}$

Lösung:

$$\frac{5km}{6} : \frac{3k}{2m} = \frac{5km}{6} \cdot \frac{2m}{3k} = \frac{5 \cdot \cancel{2} \cdot km^2}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot k} = \boxed{\frac{5m^2}{9}}$$

(c) $\dfrac{1}{24rs^3} : \dfrac{1}{16r^2s}$

Lösung:

$$\frac{1}{24rs^3} : \frac{1}{16r^2s} = \frac{1}{24rs^3} \cdot \frac{16r^2s}{1} = \frac{\cancel{8} \cdot 2 \cdot r^2s}{\cancel{8} \cdot 3 \cdot rs^3} = \boxed{\frac{2r}{3s^2}}$$

(d) $\dfrac{\frac{54k^2}{65t}}{\frac{81k}{75t^2}}$

Lösung:

$$\frac{\frac{54k^2}{65t}}{\frac{81k}{75t^2}} = \frac{54k^2}{65t} : \frac{81k}{75t^2} = \frac{54k^2}{65t} \cdot \frac{75t^2}{81k} = \frac{\cancel{27} \cdot 2 \cdot \cancel{5} \cdot 15 \cdot kt}{\cancel{5} \cdot 13 \cdot \cancel{27} \cdot 3} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 5 \cdot kt}{13 \cdot \cancel{3}} = \boxed{\frac{10kt}{13}}$$

(e) $\dfrac{\frac{14u^3v}{57xyz}}{\frac{35uv^2}{76y^2z}}$

Lösung:

$$\frac{\frac{14u^3v}{57xyz}}{\frac{35uv^2}{76y^2z}} = \frac{14u^3v}{57xyz} : \frac{35uv^2}{76y^2z} = \frac{14u^3v}{57xyz} \cdot \frac{76y^2z}{35uv^2} = \frac{2 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{19} \cdot 4 \cdot u^3vy^2z}{3 \cdot \cancel{19} \cdot 5 \cdot \cancel{7} \cdot uv^2xyz} = \boxed{\frac{8u^2y}{15vx}}$$

(f) $\dfrac{9ab^2c^3}{\left(9 \cdot \frac{ab}{c}\right)^2}$

Lösung:

$$\frac{9ab^2c^3}{\left(9 \cdot \frac{ab}{c}\right)^2} = \frac{9ab^2c^3}{9^2\frac{a^2b^2}{c^2}} = \frac{9 \cdot ab^2c^5}{9 \cdot 9 \cdot a^2b^2} = \boxed{\frac{c^5}{9a}}$$

(g) $\dfrac{\frac{3m}{4n}}{6mn}$

Lösung:

$$\frac{\frac{3m}{4n}}{6mn} = \frac{3m}{4n} : \frac{6mn}{1} = \frac{3m}{4n} \cdot \frac{1}{6mn} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{m}}{4 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{m} n^2} = \boxed{\frac{1}{8n^2}}$$

(h) $\dfrac{4(c-d)}{a} : \dfrac{8c}{a}$

Lösung:

$$\frac{4(c-d)}{a} : \frac{8c}{a} = \frac{4(c-d)}{a} \cdot \frac{a}{8c} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{a}(c-d)}{\cancel{a} \cdot \cancel{4} \cdot 2c} = \boxed{\frac{c-d}{2c}}$$

(i) $\dfrac{27x}{4y} : \dfrac{-18z}{5w} \cdot 4$

Lösung:

$$\frac{27x}{4y} : \frac{-18z}{5w} \cdot 4 = \frac{27x}{4y} \cdot \frac{5w}{-18z} \cdot \frac{4}{1} = \frac{\cancel{9} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot xw}{\cancel{4} \cdot (-\cancel{9} \cdot 2) \cdot yz} = \boxed{\frac{-15xw}{2yz}}$$

(j) $\dfrac{46pq}{3x} : \dfrac{69q}{9x} \cdot \dfrac{2r}{2x}$

Lösung:

$$\frac{46pq}{3x} : \frac{69q}{9x} \cdot \frac{2r}{2x} = \frac{46pq}{3x} \cdot \frac{9x}{69q} \cdot \frac{2r}{2x} = \frac{\cancel{23} \cdot 2p \cdot \cancel{3} \cdot 3\cancel{x} \cdot \cancel{q} \cdot r}{3\cancel{x} \cdot \cancel{23} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{2x}} = \boxed{\frac{2pr}{x}}$$

6. Addieren/Subtrahieren.

(a) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{4x}{3}$

Lösung:

$$\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3} = \frac{2x + 4x}{3} = \frac{6x}{3} = \boxed{2x}$$

(b) $\dfrac{1}{m+1} + \dfrac{m}{m+1}$

Lösung:

$$\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1} = \frac{1+m}{m+1} = \boxed{1}$$

(c) $\dfrac{4ktw}{2t-1} - \dfrac{2kw}{2t-1}$

Lösung: Im zusammengefassten Zähler wird $2kw$ ausgeklammert.

$$\frac{4ktw}{2t-1} - \frac{2kw}{2t-1} = \frac{4ktw - 2kw}{2t-1} = \frac{2kw(2t-1)}{2t-1} = \boxed{2kw}$$

(d) $\dfrac{q}{p-q} - \dfrac{p}{p-q}$

Lösung: Im Zähler wird -1 ausgeklammert, um den Faktor $(p-q)$ zu erhalten.

$$\frac{q}{p-q} - \frac{p}{p-q} = \frac{q-p}{p-q} = \frac{(-1)(p-q)}{p-q} = \boxed{-1}$$

(e) $\dfrac{4u}{21} + \dfrac{9u}{14}$

Lösung: Der Hauptnenner ist $\mathrm{kgV}(21, 14) = 42$.

$$\frac{4u}{21} + \frac{9u}{14} = \frac{2 \cdot 4u}{2 \cdot 21} + \frac{3 \cdot 9u}{3 \cdot 14} = \frac{8u + 27u}{42} = \frac{35u}{42} = \boxed{\frac{5u}{6}}$$

(f) $\dfrac{8}{9m} - \dfrac{11}{36m}$

Lösung: Der Hauptnenner ist $\mathrm{kgV}(9, 36) = 36$.

$$\frac{8}{9m} - \frac{11}{36m} = \frac{4 \cdot 8}{4 \cdot 9m} - \frac{11}{36m} = \frac{32 - 11}{36m} = \frac{21}{36m} = \boxed{\frac{7}{12m}}$$

(g) $\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r^3}$

Lösung: Der Hauptnenner ist r^3.

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} = \frac{1 \cdot r}{r^2 \cdot r} - \frac{1}{r^3} = \boxed{\frac{r-1}{r^3}}$$

(h) $\dfrac{a+b}{b} - \dfrac{a-b}{a}$

Lösung: Der Hauptnenner ist ab. Beim zweiten Zähler unbedingt mit Klammern rechnen.

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a} &= \frac{(a+b) \cdot a}{b \cdot a} - \frac{(a-b) \cdot b}{a \cdot b} \\ &= \frac{a(a+b) - b(a-b)}{ab} = \frac{a^2 + ab - ab + b^2}{ab} = \boxed{\frac{a^2 + b^2}{ab}}\end{aligned}$$

(i) $\dfrac{(u-v)^2}{u^2v^2} - \dfrac{2u+v}{u^2v} + \dfrac{u-3c}{uv^2}$

Lösung: Um die Brüche gleichnamig zu machen wird der zweite Bruch mit v erweitert und der dritte mit u. Nach dem Zusammenfassen der Brüche wird der Zähler ausmultipliziert und vereinfacht.

$$\begin{aligned}\frac{(u-v)^2}{u^2v^2} - \frac{2u+v}{u^2v} + \frac{u-3c}{uv^2} &= \frac{(u-v)^2}{u^2v^2} - \frac{(2u+v)\cdot v}{u^2v\cdot v} + \frac{(u-3c)\cdot u}{uv^2\cdot u}\\ &= \frac{(u-v)^2 - (2u+v)v + (u-3c)u}{u^2v^2}\\ &= \frac{u^2-2uv+v^2-2uv-v^2+u^2-3cu}{u^2v^2}\\ &= \boxed{\frac{2u^2-4uv-3cu}{u^2v^2}}\end{aligned}$$

(j) $\dfrac{m}{m-1} - \dfrac{m-1}{m+2}$

Lösung: Der erste Bruch wird mit $(m+2)$ erweitert, der zweite mit $(m-1)$. Nach dem Zusammenfassen der Brüche wird der Zähler mithilfe der zweiten binomischen Formel ausmultipliziert und anschliessend vereinfacht.

$$\begin{aligned}\frac{m}{m-1} - \frac{m-1}{m+2} &= \frac{m(m+2)}{(m-1)(m+2)} - \frac{(m-1)\cdot(m-1)}{(m+2)\cdot(m-1)}\\ &= \frac{m(m+2)-(m-1)^2}{(m+2)(m-1)}\\ &= \frac{m^2+2m-\left(m^2-2m+1\right)}{(m+2)(m-1)} = \boxed{\frac{4m-1}{(m+2)(m-1)}}\end{aligned}$$

(k) $\dfrac{3u}{u^2+2uv+v^2} - \dfrac{1}{u+v}$

Lösung: Das binomisch geschulte Auge erkennt die erste binomische Formel im ersten Nenner. Somit muss nur der zweite Bruch mit $(u+v)$ erweitert werden, um die Brüche gleichnamig zu machen.

$$\begin{aligned}\frac{3u}{u^2+2uv+v^2} - \frac{1}{u+v} &= \frac{3u}{(u+v)^2} - \frac{1\cdot(u+v)}{(u+v)(u+v)}\\ &= \frac{3u-(u+v)}{(u+v)^2} = \boxed{\frac{2u-v}{(u+v)^2}}\end{aligned}$$

(l) $\dfrac{a+2b+t}{4at+8bt} - \dfrac{1}{4t}$

Lösung: Im ersten Nenner kann $4t$ ausgeklammert werden. Somit muss nur der zweite Bruch mit $(a+2b)$ erweitert werden, um die Brüche gleichnamig zu machen.

Im zusammengefassten Zähler bleibt nur t übrig, was gekürzt werden kann.

$$\frac{a+2b+t}{4at+8bt} - \frac{1}{4t} = \frac{a+2b+t}{4t(a+2b)} - \frac{1\cdot(a+2b)}{4t\cdot(a+2b)}$$
$$= \frac{a+2b+t-(a+2b)}{4t(a+2b)} = \frac{t}{4t(a+2b)} = \boxed{\frac{1}{4(a+2b)}}$$

(m) $\dfrac{x-y}{15x+10y} + \dfrac{x+y}{3x+2y}$

Lösung: Im ersten Nenner kann 5 ausgeklammert werden. Somit muss nur der zweite Bruch mit $(3x+2y)$ erweitert werden, um die Brüche gleichnamig zu machen. Im zusammengefassten Zähler kann 2 ausgeklammert werden. Nun kann mit $(3x+2y)$ gekürzt werden.

$$\frac{x-y}{15x+10y} + \frac{x+y}{3x+2y} = \frac{x-y}{5(3x+2y)} + \frac{(x+y)\cdot 5}{(3x+2y)\cdot 5}$$
$$= \frac{x-y+5(x+y)}{5(3x+2y)} = \frac{6x+4y}{5(3x+2y)}$$
$$= \frac{2(3x+2y)}{5(3x+2y)} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

(n) $\dfrac{8p}{4p^2-4p+1} - \dfrac{3}{2p-1}$

Lösung: Das Binom im ersten Nenner ist inzwischen klar erkennbar. Somit muss der zweite Bruch mit $(2p-1)$ erweitert werden.

$$\frac{8p}{4p^2-4p+1} - \frac{3}{2p-1} = \frac{8p}{(2p-1)^2} - \frac{3\cdot(2p-1)}{(2p-1)\cdot(2p-1)}$$
$$= \frac{8p-3(2p-1)}{(2p-1)^2} = \frac{8p-6p+3}{(2p-1)^2} = \boxed{\frac{2p+3}{(2p-1)^2}}$$

(o) $\dfrac{a-b}{4a+4b} + \dfrac{a+4b}{6a+6b}$

Lösung: Der erste Bruch wird mit 3 erweitert, der zweite mit 2. Nach dem Zusammenfassen und Vereinfachen des Zählers kann dort 5 ausgeklammert werden. Schliesslich kann mit $(a+b)$ gekürzt werden.

$$\frac{a-b}{4a+4b} + \frac{a+4b}{6a+6b} = \frac{(a-b)\cdot 3}{(4a+4b)\cdot 3} + \frac{(a+4b)\cdot 2}{(6a+6b)\cdot 2}$$
$$= \frac{3(a-b)+2(a+4b)}{12(a+b)} = \frac{3a-3b+2a+8b}{12(a+b)}$$
$$= \frac{5a+5b}{12(a+b)} = \frac{5(a+b)}{12(a+b)} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

7. Zusatzaufgaben. ★

(a) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{x-y}{xy}$

Lösung: Der erste Nenner wird mit der dritten binomischen Formel faktorisiert. Es kann mit $(x-y)$ gekürzt werden.

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{xy} = \frac{(x^2+y^2)\cdot(x-y)}{(x+y)(x-y)\cdot xy} = \boxed{\frac{x^2+y^2}{xy\cdot(x+y)}}$$

(b) $\dfrac{x^2-6xy+9y^2-z^2}{5m-5n} \cdot \dfrac{m^4-n^4}{x-3y+z}$

Lösung: Die ersten drei Terme des ersten Zählers bilden das Quadrat $(x-3y)^2$. Mit der dritten binomischen Formel lässt sich der Zähler zusammen mit z^2 weiter zu zwei Klammern faktorisieren. Im zweiten Zähler wird die dritte binomische Formel zweimal angewendet und im ersten Nenner wird 5 ausgeklammert. Nun kann mit $(x-3y+z)$ und $(m-n)$ gekürzt werden.

$$\frac{x^2-6xy+9y^2-z^2}{5m-5n}\cdot\frac{m^4-n^4}{x-3y+z} = \frac{(x-3y+z)(x-3y-z)\cdot(m-n)(m+n)(m^2+n^2)}{5(m-n)(x-3y+z)} = \boxed{\frac{(x-3y-$$

(c) $\dfrac{40cm-60dm+32cn-48dn}{24cm-36dm+16cn-24dn}$

Lösung: Im Zähler wird zunächst $20m$ und $16n$ ausgeklammert, im Nenner $12m$ und $8n$. Dabei bleibt überall der Faktor $(2c-3d)$ übrig, welcher nun ausgeklammert und gekürzt werden kann. Schliesslich kann noch 4 ausgeklammert und gekürzt werden.

$$\frac{20m(2c-3d)+16n(2c-3d)}{12m(2c-3d)+8n(2c-3d)} = \frac{(2c-3d)(20m+16n)}{(2c-3d)(12m+8n)} = \frac{4(5m+4n)}{4(3m+2n)} = \boxed{\frac{5m+4n}{3m+2n}}$$

(d) $\dfrac{kn-2k}{3n^2-3n-6}$

Lösung: Im Zähler wird k ausgeklammert, im Nenner 3. Da der gemeinsame Faktor $(n-2)$ erwartet wird, kann (n^2-n-2) faktorisiert werden. Schliesslich wird mit $(n-2)$ gekürzt.

$$\frac{kn-2k}{3n^2-3n-6} = \frac{k(n-2)}{3(n^2-n-2)} = \frac{k(n-2)}{3(n-2)(n+1)} = \boxed{\frac{k}{3(n+1)}}$$

(e) $\dfrac{a^2-b^2-2bc-c^2}{2a+2b+2c}$

Lösung: Zunächst wird im Nenner 2 ausgeklammert. Im Zähler kann der Teil $b^2+2bc+c^2$ mit der ersten binomischen Formel faktorisiert werden. Nun steht im Zähler die Differenz zweier Quadrate, also kann die dritte binomische Formel verwendet

werden. Nun kann mit $(a+b+c)$ gekürzt werden.

$$\frac{a^2-b^2-2bc-c^2}{2a+2b+2c} = \frac{a^2-(b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+(b+c))(a-(b+c))}{2(a+b+c)} = \boxed{\frac{a-b-c}{2}}$$

(f) $\dfrac{t+7}{3t-6} - \dfrac{t+4}{t^2-2t}$

Lösung: Im ersten Nenner wird 3 ausgeklammert, im zweiten t. Somit muss der erste Bruch mit t erweitert werden, der zweite mit 3. Nach dem Zusammenfassen kann die Summe im Zähler mit dem Zweiklammeransatz faktorisiert werden. Der Faktor $(t-2)$ kann gekürzt werden.

$$\begin{aligned}\frac{t+7}{3t-6} - \frac{t+4}{t^2-2t} &= \frac{t+7}{3(t-2)} - \frac{t+4}{t(t-2)} \\ &= \frac{(t+7)\cdot t}{3(t-2)\cdot t} - \frac{(t+4)\cdot 3}{t(t-2)\cdot 3} \\ &= \frac{t(t+7)-3(t+4)}{3t(t-2)} = \frac{t^2+7t-3t-12}{3t(t-2)} \\ &= \frac{t^2+4t-12}{3t(t-2)} = \frac{(t-2)(t+6)}{3t(t-2)} = \boxed{\frac{t+6}{3t}}\end{aligned}$$

(g) $\dfrac{2v+3w}{2v+w} - \dfrac{2v-w}{2v} - \dfrac{2v+3w}{w}$

Lösung: Der Hauptnenner ist $2vw(2v+w)$. Der erste Bruch wird mit $2vw$, der zweite mit $w(2v+w)$ und der dritte mit $2v(2v+w)$ erweitert. Nach dem Zusammenfassen werden die Klammern im Zähler ausmultipliziert und die Terme zusammengefasst. Der Zähler lässt sich über $\mathbb{Q}$ nicht weiter faktorisieren.

$$\begin{aligned}\frac{2v+3w}{2v+w} - \frac{2v-w}{2v} - \frac{2v+3w}{w} &= \frac{2vw(2v+3w) - w(2v+w)(2v-w) - 2v(2v+w)(2v+3w)}{2vw(2v+w)} \\ &= \frac{4v^2w+6vw^2-\left(4v^2w-w^3\right)-\left(8v^3+16v^2w+6vw^2\right)}{2vw(2v+w)} \\ &= \boxed{\frac{w^3-8v^3-16v^2w}{2vw(2v+w)}}\end{aligned}$$

(h) $\dfrac{2r-19}{3r-7} - \dfrac{5r}{6r-8} - \dfrac{1}{2}$

Lösung: Der Hauptnenner ist $(3r-7)(6r-8)$. Mit $6r-8 = 2(3r-4)$ lässt sich das

Ergebnis anschliessend kürzen.

$$\frac{2r-19}{3r-7}-\frac{5r}{6r-8}-\frac{1}{2}=\frac{(2r-19)(6r-8)-5r(3r-7)-(3r-7)(3r-4)}{(3r-7)(6r-8)}$$
$$=\frac{-3r^2-95r+152-\left(9r^2-33r+28\right)}{(3r-7)(6r-8)}$$
$$=\frac{-12r^2-62r+124}{(3r-7)(6r-8)}=\boxed{\frac{-6r^2-31r+62}{(3r-7)(3r-4)}}$$

(i) $\dfrac{5}{p-2}-\dfrac{3}{2p+1}+\dfrac{1}{p+1}$

Lösung: Da alle Nenner unterschiedlich sind, muss jeder Bruch mit den Nennern der anderen zwei Brüchen erweitert werden. Anschliessend können die Brüche zusammengefasst werden. Schliesslich wird der Zähler ausmultipliziert und vereinfacht.

$$\frac{5}{p-2}-\frac{3}{2p+1}+\frac{1}{p+1}=\frac{5(2p+1)(p+1)-3(p-2)(p+1)+(p-2)(2p+1)}{(p-2)(2p+1)(p+1)}$$
$$=\frac{(10p+5)(p+1)-(3p-6)(p+1)+(p-2)(2p+1)}{(p-2)(2p+1)(p+1)}$$
$$=\frac{10p^2+15p+5-\left(3p^2-3p-6\right)+2p^2-3p-2}{(p-2)(2p+1)(p+1)}$$
$$=\boxed{\frac{9p^2+15p+9}{(p-2)(2p+1)(p+1)}}$$

(j) $\dfrac{8s}{s^2-4}+\dfrac{2+s}{2-s}$

Lösung: Erste Zeile: Zunächst wird im ersten Nenner (-1) ausgeklammert, der zweite Bruch wird mit $(2+s)$ erweitert. Zweite Zeile: Nun wird der erste Bruch mit (-1) erweitert, was den Faktor (-1) in den Zähler bringt. Der Nenner wird mit der dritten binomischen Formel faktorisiert. Nun sind die Nenner gleichnamig, die Brüche können zusammengefasst werden. Der zweite Zähler wird mit der ersten binomischen Formel ausmultipliziert. Dritte Zeile: Im Zähler werden $4s-8s$ zusammengefasst. Nun kann der Zähler mit der zweiten binomischen Formel faktorisiert werden. Schliesslich kann mit $(2-s)$ gekürzt werden.

$$\frac{8s}{s^2-4}+\frac{2+s}{2-s}=\frac{8s}{(-1)\,(4-s^2)}+\frac{(2+s)\cdot(2+s)}{(2-s)\cdot(2+s)}$$
$$=\frac{-8s}{(2+s)(2-s)}+\frac{(2+s)^2}{(2-s)(2+s)}=\frac{-8s+2^2+4s+s^2}{(2+s)(2-s)}$$
$$=\frac{2^2-4s+s^2}{(2+s)(2-s)}=\frac{(2-s)^2}{(2+s)(2-s)}=\boxed{\frac{2-s}{2+s}}$$