Bruchgleichungen

Die Grundmenge für dieses Arbeitsblatt ist $\mathbb{Q}$.

1. **Zahlen im Nenner.** Wie lautet die Lösungsmenge?

(a) $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 45$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
x + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} &= 45 && \mid \cdot 6 \\
6 \cdot x + \frac{6 \cdot x}{3} + \frac{6 \cdot x}{6} &= 6 \cdot 45 && \mid \text{kürzen} \\
6x + 2x + x &= 270 && \mid \text{zusammenfassen} \\
9x &= 270 && \mid : 9 \\
x &= 30
\end{aligned}
$$

$L = \{30\}$

(b) $\frac{4x+1}{26} - \frac{2x-1}{39} = 0$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{4x+1}{26} - \frac{2x-1}{39} &= 0 && \mid \text{Nenner faktorisieren} \\
\frac{4x+1}{2 \cdot 13} - \frac{2x-1}{3 \cdot 13} &= 0 && \mid \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 \\
\frac{2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot (4x+1)}{2 \cdot 13} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot (2x-1)}{3 \cdot 13} &= 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 0 && \mid \text{kürzen} \\
3(4x+1) - 2(2x-1) &= 0 && \mid \text{ausmultiplizieren} \\
12x + 3 - 4x + 2 &= 0 && \mid \text{zusammenfassen} \\
8x + 5 &= 0 && \mid -5 \\
8x &= -5 && \mid : 8 \\
x &= \tfrac{-5}{8}
\end{aligned}
$$

$L = \left\{\frac{-5}{8}\right\}$

(c) $\frac{x}{4} + \frac{1}{5} = \frac{x}{2} + \frac{x}{6}$

Lösung:

$$\begin{array}{rcl|l}
\frac{x}{4}+\frac{1}{5}=\frac{x}{2}+\frac{x}{6} & & & \text{Nenner faktorisieren}\\
\frac{x}{2\cdot 2}+\frac{1}{5}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2\cdot 3} & & & \cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\\
\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot x}{2\cdot 2}+\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 1}{5}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot x}{2}+\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot x}{2\cdot 3} & & & \text{kürzen}\\
15x+12 & = & 30x+10x & -15x\\
12 & = & 25x & :25\\
\frac{12}{25} & = & x &
\end{array}$$

$L=\left\{\frac{12}{25}\right\}$

(d) $\frac{2x}{3}-\frac{4x}{9}=31-\frac{3x}{2}$

Lösung:

$$\begin{array}{rcl|l}
\frac{2x}{3}-\frac{4x}{9}=31-\frac{3x}{2} & & & \text{Nenner faktorisieren}\\
\frac{2x}{3}-\frac{4x}{3\cdot 3}=31-\frac{3x}{2} & & & \cdot 2\cdot 3\cdot 3\\
\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 2x}{3}-\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 4x}{3\cdot 3}=2\cdot 3\cdot 3\cdot 31-\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 3x}{2} & & & \text{kürzen}\\
6\cdot 2x-2\cdot 4x & = & 31\cdot 18-9\cdot 3x & \text{zusammenfassen}\\
4x & = & 31\cdot 18-27x & +27x\\
31x & = & 31\cdot 18 & :31\\
x & = & 18 &
\end{array}$$

$L=\{18\}$

(e) $\frac{8x-15}{12}+\frac{3x+18}{15}=2$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{8x-15}{3\cdot 4}+\frac{3x+18}{3\cdot 5} &= 2 && \text{Nenner faktorisieren}\\
\frac{8x-15}{12}+\frac{3x+18}{15} &= 2 && \cdot 3\cdot 4\cdot 5\\
\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot(8x-15)}{12}+\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot(3x+18)}{15} &= 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2 && \text{kürzen}\\
5(8x-15)+4(3x+18) &= 120 && \text{ausmultiplizieren}\\
40x-75+12x+72 &= 120 && \text{zusammenfassen}\\
52x-3 &= 120 && +3\\
52x &= 123 && :52\\
x &= \frac{123}{52}
\end{aligned}$$

$L=\left\{\frac{123}{52}\right\}$

(f) $\frac{14}{3}-\frac{5x-1}{6}=\frac{34x-1}{3}-7$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{14}{3}-\frac{5x-1}{6} &= \frac{34x-1}{3}-7 && \cdot 6\\
\frac{6\cdot 14}{3}-\frac{6\cdot(5x-1)}{6} &= \frac{6\cdot(34x-1)}{3}-6\cdot 7 && \text{kürzen}\\
28-(5x-1) &= 2(34x-1)-42 && \text{vereinfachen}\\
28-5x+1 &= 68x-2-42 && \text{zusammenfassen}\\
29-5x &= 68x-44 && +5x+44\\
73 &= 73x && :73\\
1 &= x
\end{aligned}$$

$L=\{1\}$

2. MathemaTrick 1. Wie lauten die Definitionsmenge und die Lösungsmenge? Lösungsvideo

(a) $\frac{2}{x}=4$

Lösung:

$D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $L=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(b) $\frac{3}{x-7}=2$

Lösung:

$D=\mathbb{Q}\setminus\{7\}$ $L=\left\{\frac{17}{2}\right\}$

(c) $\dfrac{x-5}{x-2} = 1 - \dfrac{x+1}{x-2}$

Lösung: Hier ergibt sich die Gleichung $x = 2$. Da aber 2 nicht in der Definitionsmenge liegt, gibt es keine Lösung.

$D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ $L = \{\}$

(d) $\dfrac{2}{1+2x} = \dfrac{9}{3+6x} - \dfrac{1}{4-x}$

Lösung:

$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{-1}{2};\ 4\right\}$ $L = \{1\}$

3. Variable im Nenner. Wie lauten die Definitions- und Lösungsmenge?

(a) $\dfrac{2}{x} = \dfrac{x-3}{3x} - \dfrac{x+5}{4x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}}$.

$$\frac{2}{x} = \frac{x-3}{3x} - \frac{x+5}{4x} \quad \Big| \cdot 12x$$

$$\frac{12x \cdot 2}{x} = \frac{12x \cdot (x-3)}{3x} - \frac{12x \cdot (x+5)}{4x} \quad \Big| \text{ kürzen}$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 2 &= 4(x-3) - 3(x+5) && \Big| \text{ ausmultiplizieren} \\ 24 &= 4x - 12 - 3x - 15 && \Big| \text{ zusammenfassen} \\ 24 &= x - 27 && \Big| + 27 \\ 51 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{51\}}$.

(b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x+5}{x+6} = 2$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0;\ -6\}}$.

$$\frac{1}{x} + \frac{2x+5}{x+6} = 2 \qquad \mid \cdot x(x+6)$$

$$\frac{x(x+6)\cdot 1}{x} + \frac{x(x+6)\cdot(2x+5)}{x+6} = x(x+6)\cdot 2 \qquad \mid \text{kürzen}$$

$$(x+6) + x(2x+5) = 2x(x+6) \qquad \mid \text{ausmultiplizieren}$$

$$x + 6 + 2x^2 + 5x = 2x^2 + 12x \qquad \mid \text{zusammenfassen}$$

$$2x^2 + 6x + 6 = 2x^2 + 12x \qquad \mid -2x^2 - 6x$$

$$6 = 6x \qquad \mid :6$$

$$1 = x$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{1\}}$.

(c) $\dfrac{2}{x-2} = \dfrac{1}{3}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}}$.

$$\frac{2}{x-2} = \frac{1}{3} \qquad \mid \cdot 3(x-2)$$

$$\frac{3(x-2)\cdot 2}{x-2} = \frac{3(x-2)\cdot 1}{3} \qquad \mid \text{kürzen}$$

$$3 \cdot 2 = x - 2 \qquad \mid +2$$

$$8 = x$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{8\}}$.

(d) $\dfrac{7}{x-4} - \dfrac{2}{x-4} = 1$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{4\}}$.

$$\frac{7}{x-4} - \frac{2}{x-4} = 1 \qquad \mid \cdot (x-4)$$

$$\frac{(x-4)\cdot 7}{x-4} - \frac{(x-4)\cdot 2}{x-4} = (x-4)\cdot 1 \qquad \mid \text{kürzen}$$

$$7 - 4 = x - 4 \qquad \mid +4$$

$$9 = x$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{9\}}$.

(e) $\frac{5(x-3)}{12x} - \frac{2(x+1)}{15x} = 1$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}}$.

$$\frac{5(x-3)}{12x} - \frac{2(x+1)}{15x} = 1 \quad \Big| \cdot 60x$$

$$\frac{60x \cdot 5(x-3)}{12x} - \frac{60x \cdot 2(x+1)}{15x} = 60x \cdot 1 \quad \Big| \text{ kürzen}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 5(x-3) - 4 \cdot 2(x+1) &= 60x && \Big| \text{ ausmultiplizieren} \\ 25x - 75 - 8x - 8 &= 60x && \Big| \text{ zusammenfassen} \\ 17x - 83 &= 60x && \Big| - 17x \\ -83 &= 43x && \Big| : 43 \\ \frac{-83}{43} &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \left\{\frac{-83}{43}\right\}}$.

(f) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2(x+5)} = \frac{3}{x+5}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-5\}}$.

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2(x+5)} = \frac{3}{x+5} \quad \Big| \cdot 4(x+5)$$

$$\frac{4(x+5) \cdot 1}{4} - \frac{4(x+5) \cdot 1}{2(x+5)} = \frac{4(x+5) \cdot 3}{x+5} \quad \Big| \text{ kürzen}$$

$$\begin{aligned} (x+5) - 2 &= 4 \cdot 3 && \Big| \text{ zusammenfassen} \\ x + 3 &= 12 && \Big| - 3 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{9\}}$.

4. **MathemaTrick 2.** Wie lauten die Definitionsmenge und die Lösungsmenge? Lösungsvideo

$$\frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-4}$$

Lösung:

$D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ $L = \{1\}$

5. **Zuerst faktorisieren.** Wie lauten die Definitions- und Lösungsmenge? Hier müssen die Nenner zuerst faktorisiert werden.

(a) $\dfrac{4x-9}{x^2-3x-40} = \dfrac{3}{x+5}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{4x-9}{x^2-3x-40} &= \frac{3}{x+5} && \text{faktorisieren}\\
\frac{4x-9}{(x+5)(x-8)} &= \frac{3}{x+5} && \cdot (x+5)(x-8)\\
\frac{(x+5)(x-8)\cdot(4x-9)}{(x+5)(x-8)} &= \frac{(x+5)(x-8)\cdot 3}{x+5} && \text{kürzen}\\
4x-9 &= (x-8)\cdot 3 && \text{ausmultiplizieren}\\
4x-9 &= 3x-24 && -3x+9\\
x &= -15
\end{aligned}$$

Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-5;\ 8\}}$, die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{-15\}}$.

(b) $\dfrac{5}{x^2-9} - \dfrac{3}{x^2-6x+9} = 0$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x^2-9} - \frac{3}{x^2-6x+9} &= 0 && \text{faktorisieren}\\
\frac{5}{(x+3)(x-3)} - \frac{3}{(x-3)^2} &= 0 && \cdot (x+3)(x-3)^2\\
\frac{(x+3)(x-3)^2\cdot 5}{(x+3)(x-3)} - \frac{(x+3)(x-3)^2\cdot 3}{(x-3)^2} &= 0 && \text{kürzen}\\
(x-3)\cdot 5 - (x+3)\cdot 3 &= 0 && \text{ausmultiplizieren}\\
5x-15-3x-9 &= 0 && \text{zusammenfassen}\\
2x-24 &= 0 && +24\\
2x &= 24 && :2\\
x &= 12
\end{aligned}$$

Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-3;\ 3\}}$, die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{12\}}$.

(c) $\dfrac{32x-11}{15x-21} - \dfrac{2(x+9)}{25x-35} + \dfrac{16}{40x-56} = 1$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{32x-11}{15x-21}-\frac{2(x+9)}{25x-35}+\frac{16}{40x-56}&=1 && \text{faktorisieren}\\
\frac{32x-11}{3(5x-7)}-\frac{2(x+9)}{5(5x-7)}+\frac{16}{8(5x-7)}&=1 && \cdot 15(5x-7)\\
5\cdot(32x-11)-3\cdot 2(x+9)+2\cdot 2&=15(5x-7) && \text{ausmultiplizieren}\\
160x-55-6x-54+30&=75x-105 && \text{zusammenfassen}\\
154x-79&=75x-105 && -75x+79\\
79x&=-26 && :79\\
x&=\frac{-26}{79}
\end{aligned}$$

Die Definitionsmenge ist $\boxed{D=\mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{7}{5}\right\}}$, die Lösungsmenge ist $\boxed{L=\left\{\frac{-26}{79}\right\}}$.

(d) $\frac{14-2x}{x-1}-\frac{9x+1}{1-x}=1$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D=\mathbb{Q}\setminus\{1\}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{14-2x}{x-1}-\frac{9x+1}{1-x}&=1 && \text{erweitern mit } (-1)\\
\frac{14-2x}{x-1}-\frac{(-1)\cdot(9x+1)}{(-1)\cdot(1-x)}&=1 && \text{vereinfachen}\\
\frac{14-2x}{x-1}+\frac{9x+1}{x-1}&=1 && \cdot(x-1)\\
14-2x+9x+1&=x-1 && -x-15\\
-2x+9x-x&=-1-15 && \text{zusammenfassen}\\
6x&=-16 && :6\\
x&=\frac{-16}{6} && \text{kürzen}\\
x&=\frac{-8}{3}
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L=\left\{\frac{-8}{3}\right\}}$.

(e) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=\frac{20}{4x-7}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{1;\ \frac{7}{4};\ 2\}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} &= \frac{20}{4x-7} && \mid \cdot (x-1)\\
\frac{2\cdot(x-1)}{x-1} + \frac{3\cdot(x-1)}{x-2} &= \frac{20\cdot(x-1)}{4x-7} && \mid \text{vereinfachen}\\
2 + \frac{3x-3}{x-2} &= \frac{20x-20}{4x-7} && \mid \cdot (x-2)\\
2\cdot(x-2) + \frac{(3x-3)\cdot(x-2)}{x-2} &= \frac{(20x-20)\cdot(x-2)}{4x-7} && \mid \text{vereinfachen}\\
2x-4+3x-3 &= \frac{20x^2-20x-40x+40}{4x-7} && \mid \text{vereinfachen}\\
5x-7 &= \frac{20x^2-60x+40}{4x-7} && \mid \cdot (4x-7)\\
(5x-7)\cdot(4x-7) &= \frac{(20x^2-60x+40)\cdot(4x-7)}{4x-7} && \mid \text{vereinfachen}\\
20x^2-28x-35x+49 &= 20x^2-60x+40 && \mid -20x^2\\
-63x+49 &= -60x+40 && \mid +63x-40\\
9 &= 3x && \mid :3\\
3 &= x
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{3\}}$.

(f) $\dfrac{9x-1}{x^2-9x+20} = \dfrac{5}{x-4} - \dfrac{1}{x-5}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{4;\ 5\}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{9x-1}{x^2-9x+20} &= \frac{5}{x-4} - \frac{1}{x-5} && \mid \text{faktorisieren}\\
\frac{9x-1}{(x-5)(x-4)} &= \frac{5}{x-4} - \frac{1}{x-5} && \mid \cdot (x-4)\\
\frac{(9x-1)\cdot(x-4)}{(x-5)(x-4)} &= \frac{5\cdot(x-4)}{x-4} - \frac{1\cdot(x-4)}{x-5} && \mid \text{vereinfachen}\\
\frac{9x-1}{x-5} &= 5 - \frac{x-4}{x-5} && \mid \cdot (x-5)\\
\frac{(9x-1)\cdot(x-5)}{x-5} &= 5\cdot(x-5) - \frac{(x-4)\cdot(x-5)}{x-5} && \mid \text{vereinfachen}\\
9x-1 &= 5x-25-(x-4) && \mid \text{ausmultiplizieren}\\
9x-1 &= 5x-25-x+4 && \mid -4x+1\\
9x-4x &= -25+4+1 && \mid \text{zusammenfassen}\\
5x &= -20 && \mid :5\\
x &= -4
\end{aligned}$$

$x = -4$ liegt in der Definitionsmenge, also ist die Lösungsmenge $\boxed{L = \{-4\}}$.

6. MathemaTrick 3. Wie lauten die Definitionsmenge und die Lösungsmenge? Lösungsvideo

$$\frac{2x}{7} + \frac{3x+1}{84x-7} = \frac{14x+2}{49}$$

Lösung:

$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{1}{12}\right\}$ $L = \{3\}$

7. Zusatzaufgaben Leicht. Wie lauten die Definitions- und Lösungsmenge?

(a) $\frac{13}{2+x} = 5$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{13}{2+x} &= 5 && \mid \cdot (2+x) \\ 13 &= 5 \cdot (2+x) && \mid \text{ausmultiplizieren} \\ 13 &= 10 + 5x && \mid -10 \\ 3 &= 5x && \mid :5 \\ \frac{3}{5} &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \left\{\frac{3}{5}\right\}}$.

(b) $\frac{3}{2+x} = \frac{1}{2}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+x} &= \frac{1}{2} && \mid \cdot 2(2+x) \\ \frac{3 \cdot 2(2+x)}{2+x} &= \frac{1 \cdot 2(2+x)}{2} && \mid \text{kürzen} \\ 2 \cdot 3 &= 2 + x && \mid -2 \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{4\}}$.

(c) $\frac{7}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{5}{4}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{7}{x} + \frac{1}{2x} &= \frac{5}{4} && \mid \cdot 4x \\ \frac{7 \cdot 4x}{x} + \frac{1 \cdot 4x}{2x} &= \frac{5 \cdot 4x}{4} && \mid \text{kürzen} \\ 4 \cdot 7 + 2 &= 5x && \mid \text{zusammenfassen} \\ 30 &= 5x && \mid : 5 \\ 6 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{6\}}$.

(d) $\frac{3}{x} = \frac{1}{3x} - 4$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} &= \frac{1}{3x} - 4 && \mid \cdot 3x \\ \frac{3 \cdot 3x}{x} &= \frac{1 \cdot 3x}{3x} - 4 \cdot 3x && \mid \text{kürzen} \\ 3 \cdot 3 &= 1 - 12x && \mid - 1 \\ 8 &= -12x && \mid : (-12) \\ \frac{-2}{3} &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \left\{\frac{-2}{3}\right\}}$.

(e) $\frac{3}{2+x} = \frac{1}{x+2} + 1$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+x} &= \frac{1}{x+2} + 1 && \mid \cdot (2+x) \\ \frac{3 \cdot (2+x)}{2+x} &= \frac{1 \cdot (2+x)}{2+x} + 1 \cdot (2+x) && \mid \text{kürzen} \\ 3 &= 1 + (2+x) && \mid \text{ausmultiplizieren} \\ 3 &= 3 + x && \mid - 3 \\ 0 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{0\}}$.

(f) $\frac{3}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{5}{4x} = \frac{9}{4}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{5}{4x} &= \frac{9}{4} && \mid \cdot 4x \\ \frac{3 \cdot 4x}{x} + \frac{1 \cdot 4x}{2x} - \frac{5 \cdot 4x}{4x} &= \frac{9 \cdot 4x}{4} && \mid \text{kürzen} \\ 4 \cdot 3 + 2 - 5 &= 9x && \mid \text{zusammenfassen} \\ 9 &= 9x && \mid : 9 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{1\}}$.

8. Zusatzaufgaben Mittel. Wie lauten die Definitions- und Lösungsmenge?

(a) $\frac{3}{2+x} = \frac{1}{x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-2;\ 0\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+x} &= \frac{1}{x} && \mid \cdot x(2+x) \\ \frac{3 \cdot x(2+x)}{2+x} &= \frac{1 \cdot x(2+x)}{x} && \mid \text{kürzen} \\ 3x &= 2 + x && \mid - x - 2 \\ 2x &= 2 && \mid : 2 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{1\}}$.

(b) $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+1}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0;\ -1\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} &= \frac{5}{x+1} && \mid \cdot x(x+1) \\ \frac{3 \cdot x(x+1)}{x} &= \frac{5 \cdot x(x+1)}{x+1} && \mid \text{kürzen} \\ 3x + 3 &= 5x && \mid - 3x \\ 3 &= 2x && \mid : 2 \\ \frac{3}{2} &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$.

(c) $\frac{5}{1+2x} - \frac{3}{x} = 0$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{-1}{2};\ 0\right\}}$.

$$\frac{5}{1+2x} - \frac{3}{x} = 0 \qquad \left| \cdot x(1+2x) \right.$$

$$\frac{5 \cdot x(1+2x)}{1+2x} - \frac{3 \cdot x(1+2x)}{x} = 0 \cdot x(1+2x) \qquad \left| \text{ kürzen} \right.$$

$$\begin{aligned} 5x - 3(1+2x) &= 0 && \left| \text{ ausmultiplizieren} \right. \\ 5x - 3 - 6x &= 0 && \left| \text{ zusammenfassen} \right. \\ -x - 3 &= 0 && \left| \ +3 \right. \\ -x &= 3 && \left| \ :(-1) \right. \\ -3 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{-3\}}$.

(d) $\frac{6}{3+2x} = \frac{4}{x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{-3}{2};\ 0\right\}}$.

$$\frac{6}{3+2x} = \frac{4}{x} \qquad \left| \cdot x(3+2x) \right.$$

$$\frac{6 \cdot x(3+2x)}{3+2x} = \frac{4 \cdot x(3+2x)}{x} \qquad \left| \text{ kürzen} \right.$$

$$\begin{aligned} 6x &= 4(3+2x) && \left| \text{ ausmultiplizieren} \right. \\ 6x &= 12 + 8x && \left| \ -8x \right. \\ -2x &= 12 && \left| \ :(-2) \right. \\ -6 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{-6\}}$.

(e) $\frac{5}{3+4x} = \frac{2}{x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{-3}{4};\ 0\right\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3+4x} &= \frac{2}{x} && \mid \cdot x(3+4x) \\ \frac{5 \cdot x(3+4x)}{3+4x} &= \frac{2 \cdot x(3+4x)}{x} && \mid \text{kürzen} \\ 5x &= 2(3+4x) && \mid \text{ausmultiplizieren} \\ 5x &= 6+8x && \mid -8x \\ -3x &= 6 && \mid :(-3) \\ -2 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{-2\}}$.

(f) $\frac{3}{2+x} = \frac{5}{3x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-2;\ 0\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+x} &= \frac{5}{3x} && \mid \cdot 3x(2+x) \\ \frac{3 \cdot 3x(2+x)}{2+x} &= \frac{5 \cdot 3x(2+x)}{3x} && \mid \text{kürzen} \\ 9x &= 5(2+x) && \mid \text{ausmultiplizieren} \\ 9x &= 10+5x && \mid -5x \\ 4x &= 10 && \mid :4 \\ \frac{5}{2} &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \left\{\frac{5}{2}\right\}}$.

9. Zusatzaufgaben Schwieriger. Wie lauten die Definitions- und Lösungsmenge?

(a) $\frac{3}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{2x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} &= \frac{1}{x^2} + \frac{4}{2x} && \mid \cdot 2x^2 \\ \frac{3 \cdot 2x^2}{x} &= \frac{1 \cdot 2x^2}{x^2} + \frac{4 \cdot 2x^2}{2x} && \mid \text{kürzen} \\ 6x &= 2+4x && \mid -4x \\ 2x &= 2 && \mid :2 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{1\}}$.

(b) $\frac{5}{4x} + \frac{2}{x^2} = \frac{5}{2x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{5}{4x} + \frac{2}{x^2} &= \frac{5}{2x} && \mid \cdot 4x^2 \\ \frac{5 \cdot 4x^2}{4x} + \frac{2 \cdot 4x^2}{x^2} &= \frac{5 \cdot 4x^2}{2x} && \mid \text{kürzen} \\ 5x + 8 &= 10x && \mid -5x \\ 8 &= 5x && \mid :5 \\ \frac{8}{5} &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \left\{\frac{8}{5}\right\}}$.

(c) $\frac{3}{x+1} + \frac{15}{x^2+x} = 0$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-1;\ 0\}}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+1} + \frac{15}{x^2+x} &= 0 && \mid \cdot x(x+1) \\ \frac{3 \cdot x(x+1)}{x+1} + \frac{15 \cdot x(x+1)}{x(x+1)} &= 0 \cdot x(x+1) && \mid \text{kürzen} \\ 3x + 15 &= 0 && \mid -15 \\ 3x &= -15 && \mid :3 \\ -5 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{-5\}}$.

(d) $\frac{5}{x-2} = \frac{3+x}{x^2-2x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0;\ 2\}}$.

$$\frac{5}{x-2} = \frac{3+x}{x^2-2x} \quad \Big| \cdot x(x-2)$$

$$\frac{5 \cdot x(x-2)}{x-2} = \frac{(3+x) \cdot x(x-2)}{x(x-2)} \quad \Big| \text{ kürzen}$$

$$\begin{aligned} 5x &= 3+x \quad \Big| -x \\ 4x &= 3 \quad \Big| :4 \\ \frac{3}{4} &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{\frac{3}{4}\}}$.

(e) $\dfrac{3x+1}{x-4} = \dfrac{5-x}{4-x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{4\}}$.

$$\frac{3x+1}{x-4} = \frac{(5-x)(-1)}{(4-x)(-1)} \quad \Big| \textit{ erweitern}$$

$$\frac{3x+1}{x-4} = \frac{x-5}{x-4} \quad \Big| \cdot (x-4)$$

$$\frac{(3x+1) \cdot (x-4)}{x-4} = \frac{(x-5) \cdot (x-4)}{x-4} \quad \Big| \text{ kürzen}$$

$$\begin{aligned} 3x+1 &= (x-5) \quad \Big| \text{ ausmultiplizieren} \\ 3x+1 &= x-5 \quad \Big| -x-1 \\ 2x &= -6 \quad \Big| :2 \\ -3 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{-3\}}$.

(f) $\dfrac{5}{2-x} = \dfrac{7-9x}{2x^2-4x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0;\ 2\}}$.

$$\frac{5}{2-x} = \frac{7-9x}{2x^2-4x} \quad \Big| \cdot 2x(x-2)$$

$$\frac{5 \cdot 2x(x-2)}{-(x-2)} = \frac{(7-9x) \cdot 2x(x-2)}{2x(x-2)} \quad \Big| \text{ kürzen}$$

$$\begin{aligned} -10x &= 7-9x \quad \Big| +10x \\ 0 &= 7+x \quad \Big| -7 \\ -7 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{-7\}}$.

(g) $\frac{4}{x} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0;\ -1\}}$.

$$\frac{4}{x} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x} \quad \Big| \cdot x(x+1)$$

$$\frac{4 \cdot x(x+1)}{x} - \frac{3 \cdot x(x+1)}{x+1} = \frac{(2x+1) \cdot x(x+1)}{x(x+1)} \quad \Big| \text{ kürzen}$$

$$\begin{aligned} 4(x+1) - 3x &= 2x+1 && \Big| \text{ ausmultiplizieren} \\ 4x + 4 - 3x &= 2x+1 && \Big| \text{ zusammenfassen} \\ x + 4 &= 2x+1 && \Big| -x-1 \\ 3 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{3\}}$.

(h) $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{2-x} = \frac{5}{3x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0;\ 2\}}$.

$$\frac{5}{x-2} + \frac{2}{2-x} = \frac{5}{3x} \quad \Big| \cdot 3x(x-2)$$

$$\frac{5 \cdot 3x(x-2)}{x-2} - \frac{2 \cdot 3x(x-2)}{x-2} = \frac{5 \cdot 3x(x-2)}{3x} \quad \Big| \text{ kürzen}$$

$$\begin{aligned} 15x - 6x &= 5(x-2) && \Big| \text{ ausmultiplizieren} \\ 9x &= 5x - 10 && \Big| -5x \\ 4x &= -10 && \Big| :4 \\ \frac{-5}{2} &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \left\{\frac{-5}{2}\right\}}$.

(i) $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x} = \frac{13}{2x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0;\ 2\}}$.

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x} = \frac{13}{2x} \qquad \left| \cdot 2x(x-2) \right.$$

$$\frac{3 \cdot 2x(x-2)}{x-2} + \frac{2 \cdot 2x(x-2)}{x} = \frac{13 \cdot 2x(x-2)}{2x} \qquad \left| \text{ kürzen} \right.$$

$$\begin{aligned} 6x + 4(x-2) &= 13(x-2) && \left| \text{ ausmultiplizieren} \right. \\ 10x - 8 &= 13x - 26 && \left| -10x + 26 \right. \\ 18 &= 3x && \left| : 3 \right. \\ 6 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{6\}}$.

(j) $\dfrac{2}{x+5} + \dfrac{5}{3x} = \dfrac{3}{x}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{0;\ -5\}}$.

$$\frac{2}{x+5} + \frac{5}{3x} = \frac{3}{x} \qquad \left| \cdot 3x(x+5) \right.$$

$$\frac{2 \cdot 3x(x+5)}{x+5} + \frac{5 \cdot 3x(x+5)}{3x} = \frac{3 \cdot 3x(x+5)}{x} \qquad \left| \text{ kürzen} \right.$$

$$\begin{aligned} 6x + 5x + 25 &= 9(x+5) && \left| \text{ ausmultiplizieren} \right. \\ 11x + 25 &= 9x + 45 && \left| -9x - 25 \right. \\ 2x &= 20 && \left| : 2 \right. \\ 10 &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \{10\}}$.

(k) $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x+3}{x+4}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-4;\ 2\}}$.

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x+3}{x+4} \qquad \left| \cdot (x-2)(x+4) \right.$$

$$\frac{(x+1) \cdot (x-2)(x+4)}{x-2} = \frac{(x+3) \cdot (x-2)(x+4)}{x+4} \qquad \left| \text{ kürzen} \right.$$

$$\begin{aligned} (x+1)(x+4) &= (x+3)(x-2) && \left| \text{ ausmultiplizieren} \right. \\ x^2 + 5x + 4 &= x^2 + x - 6 && \left| -x^2 \right. \\ 5x + 4 &= x - 6 && \left| -x - 4 \right. \\ 4x &= -10 && \left| : 4 \right. \\ \frac{-5}{2} &= x \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \left\{\frac{-5}{2}\right\}}$.

(l) $\dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{3+2x}{x+2}$

Lösung: Die Definitionsmenge ist $\boxed{D = \mathbb{Q} \setminus \{-2;\ 1\}}$.

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{3+2x}{x+2} \quad \Big| \cdot (x-1)(x+2)$$

$$\frac{(2x+1)\cdot(x-1)(x+2)}{x-1} = \frac{(3+2x)\cdot(x-1)(x+2)}{x+2} \quad \Big| \text{ kürzen}$$

$$(2x+1)(x+2) = (3+2x)(x-1) \quad \Big| \text{ ausmultiplizieren}$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + x - 3 \quad \Big| -2x^2$$

$$5x + 2 = x - 3 \quad \Big| -x-2$$

$$4x = -5 \quad \Big| :4$$

$$\frac{-5}{4} = x$$

Die Lösungsmenge ist $\boxed{L = \left\{\frac{-5}{4}\right\}}$.

10. Subtrahieren und Dividieren. 🏆 Pascal verwechselt das Subtrahieren mit dem Dividieren. Anstatt x durch a zu teilen, subtrahiert er a von x. Trotzdem erhält er das richtige Ergebnis. Wie lautet x?

(a) $a = 2$

Lösung: $x = 4$

(b) $a = 10$

Lösung: $x = \dfrac{100}{9}$

(c) $a = -10$

Lösung: $x = \dfrac{-100}{11}$

11. Rätsel. Löse die Bruchgleichungen. Suche für jede Aufgabe die Lösung in der Tabelle und notiere dir den entsprechenden Buchstaben. Wie lautet das Lösungswort?

(a) $\dfrac{5}{x+1} = \dfrac{3}{x}$

(b) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{9}{4x}$

(c) $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{x+1}{2+4x}$

(d) $\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{3}{8-4x}=\dfrac{-17}{12}$

(e) $\dfrac{2}{x^2-x}+\dfrac{3}{4-4x}=\dfrac{1}{2x}$

(f) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{2}{3x}+\dfrac{4}{5x}$

(g) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{5+x}{2x^2+2x}$

Lösung	-3	$\frac{-5}{4}$	-1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
Buchstabe	E	U	E	R	A	H	N	B	C	G