Musterprobe Rationale Zahlen

Zeit: 80 Minuten, keine Hilfsmittel

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Total	Note
max. Punkte	6	8	9	8	8	8	47	
Punkte								

1. Dezimalzahlen. **(6P)**

(a) Wandle die Dezimalzahl -1.375 schrittweise in einen vollständig gekürzten Bruch um. (2P)

Lösung:

$$\frac{-1375}{1000} = \frac{-55 \cdot 25}{10^3} = \frac{-11 \cdot 5^3}{5^3 \cdot 2^3} = \boxed{\frac{-11}{8}}$$

Bewertung:

- Lösungsweg (mind. zwei Zwischenschritte) **1P**
- korrektes Ergebnis **1P**

(b) Zeige mit Hilfe einer Gleichung und geeigneten Umformungen, dass $\frac{11}{6} = 1.8\overline{3}$. (4P)

Lösung: Gleichung aufstellen: $x = 1.8\overline{3}$ **1P**. Mit 10 und mit 100 multiplizieren und die beiden Gleichungen subtrahieren **1P**, sodass die Periode wegfällt:

$$\begin{aligned} x &= 1.8\overline{3} \\ 10x &= 18.\overline{3} \\ 100x &= 183.\overline{3} \\ 100x - 10x &= 183.\overline{3} - 18.\overline{3} = 165 \\ 90x &= 165 \end{aligned}$$

Nach x auflösen und den Bruch kürzen **1P**:

$$x = \frac{165}{90} = \frac{11 \cdot 15}{6 \cdot 15} = \boxed{\frac{11}{6}}$$

Da alle Umformungen äquivalent sind, folgt $\frac{11}{6} = 1.8\overline{3}$. Protokoll: Menge der gültigen Zahlen und Äquivalenzumformungen festhalten **1P**. **Bewertung:**

- Gleichung korrekt aufstellen **1P**
- Subtraktionstrick **1P**
- Gleichung korrekt umformen **1P**
- Protokoll vorhanden **1P**

2. Rechnen. **(8P)**

Berechne und gib das Ergebnis als ganze oder rationale Zahl an. Halte die einzelnen Berechnungsschritte fest.

(a) $\frac{1}{2} : \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|$ (4P)

Lösung:

$$\frac{1}{2} : |\frac{2}{6} - \frac{3}{6}| = \frac{1}{2} : |\frac{-1}{6}| = \frac{1}{2} : \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1} = \boxed{3}$$

Die Betragsstriche $|\ |$ haben zwei Auswirkungen. Zunächst funktionieren sie wie Klammern, d.h. die Subtraktion im Betrag muss zuerst berechnet werden. Anschliessend wird der Betrag von $\frac{-1}{6}$ ermittelt. Der Betrag ist immer positiv, also muss das negative Vorzeichen weggelassen werden, d.h. $\left|\frac{-1}{6}\right| = \frac{1}{6}$.

Bewertung

- Subtraktion korrekt (gleichnamig machen) **1P**
- Betrag richtig ausgewertet **1P**
- Division richtig umgesetzt **1P**
- korrektes Ergebnis **1P**

(b) $\left(-2^2\right)^3 \left((-2)^3\right)^{-3}$ (4P)

Lösung: Negative Basen korrekt vereinfacht **1P**

$$= -\left(2^2\right)^3 \left(-2^3\right)^{-3} = -\left(2^2\right)^3 \left(-\left(2^3\right)^{-3}\right) = \left(2^2\right)^3 \left(2^3\right)^{-3}$$

Potenz der Potenzen korrekt als Multiplikation geschrieben **1P**

$$= 2^{2\cdot 3} \cdot 2^{3\cdot(-3)} = 2^6 \cdot 2^{-9}$$

Potenzen mit gleicher Basis korrekt multipliziert **1P**

$$= 2^{6-9} = 2^{-3}$$

Ergebnis korrekt vereinfacht **1P**

$$= \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

3. Durchmesser. **(9P)**

Gib die Durchmesser in den Teilaufgaben (a) bis (c) in der wissenschaftlichen Schreibweise in der Grundeinheit Meter an.

(a) Ein einzelnes Coronavirus hat einen Durchmesser von ca. 100 Nanometer. (2P)

Lösung: Korrekte Umrechnung in die Grundeinheit Meter **1P**, Ergebnis in wissenschaftlicher Schreibweise mit Einheit **1P**

$100 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = \boxed{1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}$

(b) Die Milchstrasse hat einen Durchmesser von ca. 200'000 Lichtjahren. Ein Lichtjahr entspricht $9.5 \cdot 10^{15}$ m. (2P)

Lösung: Korrekte Umrechnung in die Grundeinheit Meter **1P**, Ergebnis in wissenschaftlicher Schreibweise mit Einheit **1P**

$200'000 \cdot 9.5 \cdot 10^{15}\,\text{m} = \boxed{1.9 \cdot 10^{21}\,\text{m}}$

(c) Die Umlaufbahn der Erde um die Sonne hat einen Durchmesser von ca. 300 Millionen Kilometer. (2P)

Lösung: Korrekte Umrechnung in die Grundeinheit Meter **1P**, Ergebnis in wissenschaftlicher Schreibweise mit Einheit **1P**

$300 \cdot 10^{6}\,\text{km} = 300 \cdot 10^{9}\,\text{m} = \boxed{3 \cdot 10^{11}\,\text{m}}$

(d) Wie viele Blätter Papier benötigt man ungefähr, um einen Stapel vom Boden bis zum Mond zu bauen? Ein Blatt Papier ist etwa 0.1 mm dick, die Entfernung von der Erde zum Mond beträgt etwa 380'000 Kilometer. Gib die Anzahl Blätter in wissenschaftlicher Schreibweise an. (3P)

Lösung: $380'000\,\text{km} = 3.8 \cdot 10^{11}\,\text{mm}$, also

$$\frac{3.8 \cdot 10^{11}\,\text{mm}}{0.1\,\text{mm}} = \boxed{3.8 \cdot 10^{12}\ \text{Blätter}}$$

Bewertung:

- Korrekte Umrechnung in die gleiche Einheit **1P**
- korrekt ausgerechnet **1P**
- Ergebnis korrekt in wissenschaftlicher Schreibweise **1P**

4. Bruchterme. Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

(a) $\dfrac{3a+4b}{12} : \dfrac{6a+8b}{3}$ (4P)

Lösung: Division als Multiplikation mit dem Kehrbruch schreiben und korrekt multiplizieren **1P**:

$$\frac{3a+4b}{12} : \frac{6a+8b}{3} = \frac{3a+4b}{12} \cdot \frac{3}{6a+8b} = \frac{(3a+4b)\cdot 3}{12 \cdot (6a+8b)}$$

Nenner faktorisieren **1P**:

$$= \frac{(3a+4b)\cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 2(3a+4b)}$$

$(3a+4b)$ und 3 kürzen **1P**:

$$= \frac{\cancel{(3a+4b)} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 4 \cdot 2\cancel{(3a+4b)}} = \frac{1}{4 \cdot 2}$$

korrektes Ergebnis **1P**:

$$= \boxed{\frac{1}{8}}$$

(b) $\dfrac{3x^2}{x-y}+\dfrac{3y^2}{y-x}$ (4P)

Lösung: Nenner des zweiten Bruchs umformen **1P**:

$$\frac{3x^2}{x-y}+\frac{3y^2}{y-x}=\frac{3x^2}{x-y}+\frac{3y^2}{-(x-y)}=\frac{3x^2}{x-y}-\frac{3y^2}{x-y}$$

Gleichnamige Brüche subtrahieren **1P**:

$$=\frac{3x^2-3y^2}{x-y}$$

Zähler ausklammern und dritte binomische Formel anwenden **1P**:

$$=\frac{3(x^2-y^2)}{x-y}=\frac{3(x+y)(x-y)}{x-y}$$

Mit $(x-y)$ kürzen **1P**:

$$=\boxed{3(x+y)}$$

5. Bruchgleichung. **(8P)**

Gib die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichung an. Es entsteht eine lineare Gleichung.

$$\frac{15}{x+7}-\frac{3}{x-3}=\frac{x-4}{x^2+4x-21}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{15}{x+7}-\frac{3}{x-3}&=\frac{x-4}{x^2+4x-21} && \text{Nenner faktorisieren}\\
\frac{15}{x+7}-\frac{3}{x-3}&=\frac{x-4}{(x+7)(x-3)} && \cdot(x+7)(x-3)\\
(x-3)\cdot 15-(x+7)\cdot 3&=x-4 && \text{ausmultiplizieren}\\
15x-45-3x-21&=x-4 && -x+66\\
11x&=62 && :11\\
x&=\frac{62}{11}
\end{aligned}$$

Die Definitionsmenge ist $D=\mathbb{Q}\setminus\{-7;\ 3\}$.

Die Lösungsmenge ist $L=\left\{\frac{62}{11}\right\}$.

Bewertung:

- Nenner korrekt faktorisiert **1P**
- Gleichung mit $(x+7)$ multipliziert **1P**
- Gleichung mit $(x-3)$ multipliziert **1P**

- korrekt gekürzt **1P**
- lineare Gleichung korrekt gelöst **1P**
- zusätzlich Umformungsprotokoll vorhanden **1P**
- zusätzlich Lösungsmenge korrekt angegeben **1P**
- Definitionsmenge korrekt angegeben **1P**

6. Zwei aus Fünf. Markiere jeweils die zwei korrekten Antworten. **(8P)**

Pro korrekte Markierung **1P**, pro falsche Markierung **-1P**.

(a) Was trifft auf die Zahl $\frac{-3}{5}$ zu? (2P)

- √ **Sie ist die Gegenzahl von $\frac{3}{5}$.**
- ◯ Sie ist kleiner als -1.
- √ **Sie liegt auf der Zahlengeraden zwischen -1 und 0.**
- ◯ Sie ist gleich $\frac{-3}{-5}$.
- ◯ Als Dezimalzahl geschrieben ist sie -0.35.

(b) Was trifft auf rationale Zahlen zu? (2P)

- ◯ Der Quotient zweier rationaler Zahlen ist immer rational.
- √ **Jede ganze Zahl kann als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden.**
- ◯ Es gibt eine kleinste positive rationale Zahl.
- ◯ Jede rationale Zahl hat eine endliche Dezimaldarstellung.
- √ **Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen immer unendlich viele rationale Zahlen.**

(c) Was gilt für die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L einer Bruchgleichung immer? (2P)

- ◯ Auch Zahlen, die nicht in der Definitionsmenge liegen, können eine Lösung der Gleichung sein.
- ◯ Jede Zahl der Definitionsmenge ist auch eine Lösung der Gleichung.
- √ **Jede Lösung der Gleichung ist in der Definitionsmenge.**
- √ **Zahlen, die nicht in der Definitionsmenge liegen, können nie Lösungen sein.**
- ◯ Die Definitionsmenge muss beim Lösen der Gleichung nicht bestimmt werden.

(d) Welche Vereinfachungen sind korrekt? (2P)

- ◯ $\frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{y}{x-y^2}$
- ◯ $\frac{a-b}{b-a} = 1$

○ $\frac{a-b}{b-a} = 0$

√ $\frac{a-b}{b-a} = -1$

√ $\frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x-y}$