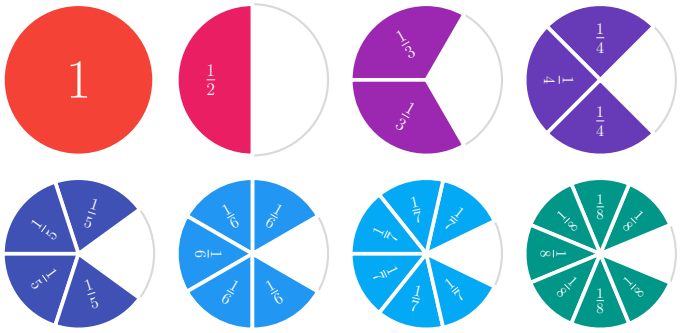
Rationale Zahlen

Stefan Rothe

02.11.2026



Inhaltsverzeichnis

1 **Brüche** 2
2 **Potenzen** 5
3 **Rationale Zahlen** 9
4 **Dezimalsystem** 11
5 **Bruchterme** 15
6 **Bruchgleichungen** 18

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Brüche

Ein Bruch ist eine alternative Schreibweise einer Division. Die Division $a : b = c$ schreiben wir als

$$\frac{a}{b} = c$$

und sagen «a über b ist gleich c.», «a durch b ist gleich c.» oder «c ist der Quotient von a und b».

In der Bruchschreibweise wird a als **Zähler** bezeichnet und b als **Nenner**.

Ein wichtiger Unterschied zwischen einem Bruch und einer Division ist die Reihenfolge, in welcher die Operationen ausgeführt werden. Bei einem Bruch werden zuerst Zähler und Nenner berechnet, erst danach wird die Division ausgeführt. Wird ein Bruch als Division geschrieben, müssen also Zähler und Nenner unbedingt in Klammern gesetzt werden:

Beispiel. $\frac{1+2}{2+3} = (1+2) : (2+3) \neq 1+2 : 2+3 = 1+\frac{2}{2}+3$

1.1 Division durch Null

Die Division durch Null muss speziell betrachtet werden. Gemäss Definition ist das Ergebnis einer Division die Antwort auf die Frage «mit was muss der Divisor (Nenner) multipliziert werden, um den Dividenden (Zähler) zu erhalten?»

$$x = \frac{a}{0} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \cdot x = a$$

Falls $a \neq 0$ ist, dann gibt es keine Zahl, welche für x eingesetzt werden kann, damit die Gleichung stimmt. Falls $a = 0$, kann jede beliebige Zahl für x eingesetzt werden, damit die Gleichung stimmt. In der Mathematik muss jedoch das Ergebnis einer Rechnung eindeutig festgelegt sein. Deshalb wird das Ergebnis einer Division durch Null als «nicht definiert» bezeichnet und die Null wird im Nenner eines Bruchs verboten.

1.2 Kürzen

Ein Bruch wird **gekürzt**, indem Zähler und Nenner durch die gleiche, von Null verschiedene ganze Zahl dividiert werden. Dabei bleibt der Wert des Bruchs gleich.

Ein Bruch $\frac{z}{n}$ ist **vollständig gekürzt**, wenn der grösste gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner gleich eins ist, also wenn $\mathrm{ggT}(z, n) = 1$.

Beispiel. $\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$

1.3 Erweitern

Ein Bruch wird **erweitert**, indem Zähler und Nenner mit der gleichen, von Null verschiedenen ganzen Zahl multipliziert werden. Dabei bleibt der Wert des Bruchs gleich.

Beispiel. $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$

1.4 Gegenzahlen

Wenn sowohl Zähler als auch Nenner eines Bruchs negativ sind, so kann der Bruch mit (-1) erweitert werden. Damit fallen die negativen Vorzeichen weg.

$$\frac{-2}{-5} = \frac{(-2)\cdot(-1)}{(-5)\cdot(-1)} = \frac{2}{5}$$

Gegenzahl bei Brüchen. Der Wert eines Bruchs ändert sich nicht, wenn sowohl Zähler als auch Nenner durch ihre Gegenzahlen ersetzt werden. Die Gegenzahl eines Bruchs erhält man, indem nur der Zähler oder nur der Nenner durch seine Gegenzahl ersetzt wird.

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

1.5 Addition und Subtraktion

Um Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, werden sie zuerst durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner gebracht. Der gemeinsame Nenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Nenner. Danach werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert, der Nenner wird nicht verändert.

Beispiel. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9+8-2}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

1.6 Multiplikation

Multiplikation von Brüchen. Brüche werden multipliziert, indem Zähler und Nenner multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Beispiel. *Zwei Drittel von drei Vierteln ist ein Halb:*

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

1.7 Kehrwert

Welche Zahl muss mit zwei Fünfteln multipliziert werden, um Eins zu erhalten?

$$\frac{2}{5} \cdot \square = 1$$

Die Antwort auf diese Frage lautet $\frac{5}{2}$, da dann das Produkt so gekürzt werden kann, dass 1 resultiert. Allgemein wird eine solche Zahl Kehrwert genannt.

Kehrwert Der Kehrwert einer Zahl $a \neq 0$ ist die Zahl $\frac{1}{a}$, welche mit a multipliziert Eins ergibt.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad \text{für } a \neq 0$$

Der Kehrwert eines Bruchs ergibt sich, indem Zähler und Nenner vertauscht werden.

Beispiel. *Der Kehrwert von* 6 *ist* $\frac{1}{6}$*, der Kehrwert von* $\frac{2}{5}$ *ist* $\frac{5}{2}$*.*

1.8 Doppelbrüche und Division

Wenn im Zähler und Nenner eines Bruchs wiederum Brüche stehen, ergibt sich ein Doppelbruch. Diese Schreibweise ist jedoch unübersichtlich, deshalb empfiehlt es sich, einen Doppelbruch gemäss Definition als Division zu schreiben:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

Division von Brüchen: Brüche werden dividiert, indem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert wird:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Beispiel. *Ein Doppelbruch wird als Division geschrieben. Die Division wird als Multiplikation mit dem Kehrwert geschrieben und ausgerechnet.*

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

2 Potenzen

2.1 Negativer Exponent

Wir untersuchen, was ein negativer Exponent bei einer Potenz bedeutet. Dazu betrachten wir, was mit dem Ergebnis einer Potenz passiert, wenn der Exponent jeweils um eins verringert wird:

$$\begin{array}{l|l} 5^3 = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 & : 5 \\ 5^2 = 1 \cdot 5 \cdot 5 = 25 & : 5 \\ 5^1 = 1 \cdot 5 = 5 & : 5 \\ 5^0 = 1 & \end{array}$$

Jedes Mal, wenn der Exponent um eins verringert wird, wird das Ergebnis der Potenz durch die Basis dividiert. Das ergibt Sinn, ein um eins kleinerer Exponent bedeutet ja, dass die Basis einmal weniger mit sich selbst multipliziert wird.

Wird diese Regel bei der Potenz 5^0 weiter angewendet, dann entsteht die Potenz 5^{-1}. Deren Ergebnis ist das Ergebnis von 5^0 dividiert durch 5, also $\frac{1}{5}$. Wird dies so fortgesetzt, können die Ergebnisse für alle negativen Exponenten bestimmt werden:

$$\begin{array}{l|l} 5^0 = 1 & : 5 \\ 5^{-1} = \dfrac{1}{5} & : 5 \\ 5^{-2} = \dfrac{1}{5 \cdot 5} = \dfrac{1}{25} & : 5 \\ 5^{-3} = \dfrac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \dfrac{1}{125} & \end{array}$$

Diese Überlegungen werden in folgender Definition festgehalten:

Negativer Exponent. Die Potenz einer Zahl a mit einem negativen Exponenten $-n$ ergibt den Kehrwert der Potenz mit der Gegenzahl n im Exponenten.

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} = \frac{1}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n-\text{mal}}}$$

Beispiel. $4^{-7} = \dfrac{1}{4^7}$ $\qquad 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0.01$

2.2 Negative Basis

Im folgenden wird betrachtet, welche Werte die Potenz einer negativen Zahl annimmt, indem die Definition angewendet wird.

$$(-5)^0 = 1 = 5^0$$
$$(-5)^1 = 1 \cdot (-5) = -5^1$$
$$(-5)^2 = 1 \cdot (-5) \cdot (-5) = 25 = 5^2$$
$$(-5)^3 = 1 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125 = -5^3$$
$$(-5)^4 = 1 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625 = 5^4$$

Wenn zwei negative Zahlen multipliziert werden, ergibt sich eine positive Zahl. Wenn der Exponent gerade ist, können alle Faktoren paarweise multipliziert werden und das Ergebnis ist positiv. Wenn der Exponent ungerade ist, bleibt immer ein negativer Faktor übrig.

Die Potenz einer negativen Zahl $-n$ mit einem **geraden Exponenten** b ist gleich der Potenz mit der Gegenzahl n als Basis.

$$(-n)^b = n^b \qquad \text{wenn } b \text{ gerade}$$

Die Potenz einer negativen Zahl $-n$ mit einem **ungeraden Exponenten** b ist gleich der Gegenzahl der Potenz mit der Gegenzahl n als Basis.

$$(-n)^b = -n^b \qquad \text{wenn } b \text{ ungerade}$$

2.3 Potenzgesetze

Potenzen können gemäss den fünf Potenzgesetzen umgeformt werden.

Produkt mit gleicher Basis. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Potenzen addiert werden:

$$a^k a^m = a^{k+m}$$

Begründung: Gemäss der Definition der Potenz bedeutet a^k, dass a der Faktor k-mal in der Multiplikation vorkommt. a^m bedeutet, dass der Faktor m-mal vorkommt. Insgesamt kommt der Faktor a also $(k+m)$-mal in der Multiplikation vor. Dies kann gemäss Definition wiederum als a^{k+m} geschrieben werden.

$$a^k a^m = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{k\text{-mal}} \cdot 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m\text{-mal}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(k+m)\text{-mal}} = a^{k+m}$$

Beispiel. $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 \qquad 3 \cdot 3^{-3} = 3^{1+(-3)} = 3^{-2}$

Quotient mit gleicher Basis. Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Potenzen subtrahiert werden:

$$\frac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$$

Begründung: Gemäss der Definition der Potenz bedeutet a^k, dass a der Faktor k-mal vorkommt. a^m bedeutet, dass der Faktor m-mal vorkommt. Insgesamt kommt der Faktor a also k-mal im Zähler und m-mal im Nenner vor. Ist k grösser als m, so bleibt der Faktor $(k-m)$-mal im Zähler übrig, was als a^{k-m} geschrieben werden kann.

$$\frac{a^k}{a^m} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{k-\text{mal}}}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-\text{mal}}} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{(k-m)-\text{mal}}}{1} = a^{k-m}$$

Ist hingegen m grösser als k, so bleibt der Faktor $(m-k)$-mal im Nenner übrig. Dies kann im Nenner als a^{m-k} geschrieben werden. Dank der Definition der Potenz für negative Exponenten kann dies ebenfalls zu a^{k-m} umgeformt werden.

$$\frac{a^k}{a^m} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{k\text{-mal}}}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-\text{mal}}} = \frac{1}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m-k)\text{-mal}}} = \frac{1}{a^{m-k}} = a^{-(m-k)} = a^{k-m}$$

Beispiel. $\dfrac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1}$ $\qquad$ $\dfrac{3^{-2}}{3^{-4}} = 3^{-2-(-4)} = 3^2$

Produkt mit gleichem Exponent. In einem Produkt können gleiche Exponenten ausgeklammert werden:

$$a^k b^k = (ab)^k$$

Begründung: Gemäss Definition ist $a^k b^k$ ein Produkt, in welchem die Faktoren a und b je k-mal vorkommen. Wegen der Kommutativität der Multiplikation können die Faktoren umgestellt werden, sodass k Faktoren ab entstehen. Dieses Produkt kann wiederum als $(ab)^k$ geschrieben werden.

$$a^k b^k = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k-\text{mal}} \cdot 1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{k-\text{mal}} = 1 \cdot \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{k-\text{mal}} = (ab)^k$$

Beispiel. $5^3 \cdot 3^3 = (5 \cdot 3)^3 = 15^3$ $\qquad$ $2^{-2} \cdot 7^{-2} = (2 \cdot 7)^{-2} = 14^{-2}$

Quotient mit gleichem Exponent. In einem Bruch können gleiche Exponenten ausgeklammert werden:

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

Begründung: Gemäss Definition hat der Bruch $\frac{a^k}{b^k}$ im Zähler bzw. im Nenner k Faktoren a bzw. b. Der Bruch kann also in eine Multiplikation von k Brüchen $\frac{a}{b}$ aufgeteilt werden. Diese können gemäss Definition der Potenz als $\left(\frac{a}{b}\right)^k$ geschrieben werden.

$$\frac{a^k}{b^k} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{k-\text{mal}}}{1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{k-\text{mal}}} = 1 \cdot \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{k-\text{mal}} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

Beispiel. $\frac{4^6}{2^6} = \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^6$ $\qquad$ $\frac{3^{-2}}{5^{-2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = 0.6^{-2}$

Potenz einer Potenz. Potenzen werden potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$\left(a^k\right)^m = (a^m)^k = a^{km}$$

Begründung: a^k bedeutet, dass der Faktor a im Produkt k-mal vorkommt. Wird die Potenz nochmals mit m potenziert, bedeutet dies, dass alle k Faktoren m-mal wiederholt werden. Insgesamt kommt der Faktor a in $\left(a^k\right)^m$ also km-mal vor. Dies kann auch als a^{km} geschrieben werden.

$$(a^k)^m = \overbrace{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k-\text{mal}} \cdot 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k-\text{mal}} \cdot \dots \cdot 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k-\text{mal}}}^{m\text{-mal}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(k \cdot m)\text{-mal}} = a^{km}$$

Beispiel. $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$ $\qquad$ $(5^2)^{-2} = 5^{2 \cdot (-2)} = 5^{-4}$

Achtung: Potenzen werden von oben nach unten berechnet. So ist 5^{3^2} nicht dasselbe wie $\left(5^3\right)^2$:

$$5^{3^2} = 5^{(3^2)} = 5^9 \qquad \left(5^3\right)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$$

3 Rationale Zahlen

3.1 Definition

Wir haben gesehen, dass gewisse Gleichungen wie $2 \cdot x = 5$ keine Lösung in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ haben. Die Lösung entspricht dem Bruch $\frac{5}{2}$. Deshalb werden die rationalen Zahlen wie folgt definiert.

Menge der rationalen Zahlen. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller vollständig gekürzten Brüche, bei welchen der Zähler eine ganze Zahl und der Nenner eine positive ganze Zahl ist.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{ggT}(z;\, n) = 1 \right\}$$

Gemischter Bruch. In der Mathematik werden Zahlen nicht als «gemischer Bruch» dargestellt. Da das Multiplikationszeichen normalerweise weggelassen wird, ist nicht klar, ob $2\frac{1}{3}$ nun $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ oder $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ bedeutet.

Ganze Zahlen. Wenn ein Bruch den Nenner Eins hat, wird nur der Zähler geschrieben. Das bedeutet, dass ein Bruch mit Nenner Eins eine ganze Zahl ist und dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auch alle ganzen Zahlen enthält.

Beispiel. $\frac{5}{1} = 5 \qquad \frac{-7}{1} = -7 \qquad \frac{0}{1} = 0$

Vollständig gekürzt. In unserer Definition wird verlangt, dass ein Bruch vollständig gekürzt sein muss, um als rationale Zahl zu gelten. Damit wird erreicht, dass jede rationale Zahl eine eindeutige Darstellung als Bruch hat. Ansonsten könnte eine rationale Zahl durch Erweitern auf unendlich viele Arten als Bruch dargestellt werden.

Beispiel. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{200}{300} = \ldots$

3.2 Zahlengerade und Mittelwert

Auch die rationalen Zahlen lassen sich auf dem Zahlenstrahl darstellen. So befindet sich beispielsweise die Zahl $\frac{1}{2}$ in der Mitte der Zahlen Null und Eins.



In der Mitte von zwei rationalen Zahlen befindet sich immer deren Mittelwert, der ebenfalls eine rationale Zahl ist. Somit liegen zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl **unendlich viele weitere** rationale Zahlen. In der Mathematik wird gesagt, die rationalen Zahlen **liegen dicht** auf dem Zahlenstrahl.

3.3 Ordnung

Wenn zwei unterschiedliche natürliche Zahlen betrachtet werden, so ist immer eine Zahl grösser als die andere. Das bedeutet, dass die Zahlen auf eine eindeutige Weise angeordnet werden können.

Definition Ordnung. In der Mathematik wird eine Menge von Zahlen als geordnet bezeichnet, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Zwei Zahlen a und b sind gleich oder a ist kleiner als b oder a ist grösser als b.

   $a = b$ oder $a < b$ oder $a > b$

2. Wenn a kleiner als b ist und b kleiner als c, so ist a kleiner als c.

   $a < b$ und $b < c$ $\Longrightarrow$ $a < c$

Beispiel. *Zwei ist kleiner als Drei und Drei ist kleiner als Vier. Also ist Zwei kleiner als Vier.*

3.4 Abgeschlossenheit

Die rationalen Zahlen sind bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division abgeschlossen. Das bedeutet, dass die Summe, die Differenz, das Produkt oder der Quotient zweier rationaler Zahlen, bei welchem der Divisor nicht Null ist, immer eine rationale Zahl ist.

4 Dezimalsystem

4.1 Stellenwertsystem

Wir stellen sämtliche natürliche Zahlen mit den zehn Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ dar. Damit das funktioniert, erhält eine Ziffer je nach ihrer Position in der Zahl einen anderen Wert.

Die Stellen einer Zahl werden beginnend mit Null von rechts nach links durchnummeriert. Der **Stellenwert** berechnet sich aus Zehn hoch die Nummer der Stelle.

So hat die zweite Stelle von rechts die Nummer 1 und ihr Stellenwert ist $10^1 = 10$.

Stelle	3	2	1	0
Stellenwert (Potenz)	10^3	10^2	10^1	10^0
Stellenwert	1000	100	10	1
Ziffer	5	4	7	8
Wert	$5 \cdot 1000$	$4 \cdot 100$	$7 \cdot 10$	$8 \cdot 1$

Der Wert der Zahl ergibt sich, indem jede Ziffer mit ihrem Stellenwert multipliziert wird und anschliessend diese Produkte addiert werden. Die Zahl 5478 bedeutet also, dass 5 Tausender, 4 Hunderter, 7 Zehner und 8 Einer addiert werden:

$$5478 = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = 5 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

4.2 Rationale Zahlen darstellen

Jede rationale Zahl kann auch als Dezimalzahl dargestellt werden. Dazu wird das Stellenwertsystem nach rechts erweitert. Rechts von der Stelle Null steht ein Dezimalpunkt, dann folgt die Stelle -1, welche einen Stellenwert von 10^{-1} oder $\frac{1}{10}$ hat. Wenn wir eine Stelle nach rechts gehen, wird der Stellenwert immer durch Zehn dividiert.

Die Dezimalzahl 42.875 bedeutet also, dass 4 Zehner, 2 Einer, 8 Zehntel, 7 Hundertstel und 5 Tausendstel addiert werden:

Stelle	1	0	-1	-2	-3
Stellenwert (Potenz)	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Stellenwert	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Ziffer	4	$2.$	8	7	5
Wert	$4 \cdot 10$	$2 \cdot 1$	$8 \cdot \frac{1}{10}$	$7 \cdot \frac{1}{100}$	$5 \cdot \frac{1}{1000}$

4.3 Bruch in Dezimalzahl umwandeln

Um einen beliebigen Bruch in eine Dezimalzahl umzuwandeln, wird die schriftliche Division angewendet.

Beispiel. *Die rationalen Zahlen $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{6}$ werden wie folgt als Dezimalzahlen dargestellt:*

$$\begin{array}{r|l} 1.000 & :8 = 0.125 \\ \hline 8 & \\ \hline 20 & \\ 16 & \\ \hline 40 & \\ 40 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2.0 & :3 = 0.\overline{6} \\ \hline 1.8 & \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1.00 & :6 = 0.1\overline{6} \\ \hline 6 & \\ \hline 40 & \\ 36 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Manche rationalen Zahlen lassen sich nicht als endliche Dezimalzahlen darstellen, da bei der schriftlichen Division immer ein Rest übrig bleibt. Das bedeutet, dass sich einige Dezimalstellen immer wiederholen. Die sich wiederholenden Dezimalstellen werden mit einem Strich oberhalb der Ziffern markiert. Solche Dezimalzahlen heissen **periodische Dezimalzahlen**.

Beispiel. *Einige periodische Dezimalzahlen sind:*

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3} \qquad \frac{1}{11} = 0.090909\ldots = 0.\overline{09} \qquad \frac{43}{90} = 0.41111\ldots = 0.4\overline{1}$$

4.4 Dezimalzahl in Bruch umwandeln

Um eine Dezimalzahl in einen Bruch zu verwandeln, wird eine Gleichung verwendet. Der gesuchte Bruch wird mit x bezeichnet.

Bei einer **endlichen Dezimalzahl** wird die Gleichung mit einer genügend grossen Potzen von 10 multipliziert, sodass keine Dezimalstellen übrigbleiben. Anschliessend die Gleichung nach x aufgelöst und gekürzt.

Beispiel. $x = 0.45 \quad \Longrightarrow \quad 100x = 45 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{45}{100} = \dfrac{9}{20}$

Bei einer **rein periodischen Dezimalzahl** wird ein zusätzlicher Schritt benötigt. Nachdem die periodischen Ziffern vor den Dezimalpunkt gebracht wurden, fallen durch Subtraktion der ursprünglichen Zahl die Dezimalstellen weg.

Beispiel. *Bei $x = 0.\overline{45}$ wiederholt sich die Periode nach zwei Stellen, weshalb $100x$ denselben Dezimalteil wie x hat. Durch Subtraktion von x fällt er weg:*

$$\begin{array}{rl|l} x = 0.\overline{45} & & \cdot 100 \\ 100x = 45.\overline{45} & & \textit{subtrahieren} \\ 100x - x = .\overline{45} - 0.\overline{45} & & \\ 99x = 45 & & : 99 \end{array}$$

$$x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

Bei einer **gemischt periodischen Dezimalzahl** müssen zunächst die Dezimalstellen so verschoben werden, dass nach dem Dezimalpunkt nur periodische Stellen vorliegen.

Beispiel.

$$\begin{aligned} x &= 0.0\overline{45} && \mid \cdot 10 \\ 10x &= 0.\overline{45} && \mid \cdot 100 \\ 1000x &= 45.\overline{45} && \mid \textit{subtrahieren} \\ 1000x - 10x &= 45.\overline{45} - 0.\overline{45} && \mid \\ 990x &= 45 && \mid : 990 \end{aligned}$$

$$x = \frac{45}{990} = \frac{1}{22}$$

4.5 Wissenschaftliche Schreibweise

In der Wissenschaft treten häufig sehr grosse oder sehr kleine Zahlen auf. So ist die Sonne etwa 150'000'000'000 m von der Erde entfernt. Ein Atom hat einen Radius von etwa 0.0000000001 m. Solche Zahlen sind nicht einfach zu lesen. Deshalb werden sie üblicherweise in **wissenschaftlicher Schreibweise** dargestellt.

Dabei wird der Dezimalpunkt so verschoben, dass vor dem Dezimalpunkt genau eine Stelle steht. Um diese Verschiebung auszugleichen, wird die Zahl mit einer Potenz von 10 multipliziert.

Beispiel. *Um die Zahl 125 wissenschaftlich darzustellen, wird sie durch $100 = 10^2$ dividiert, um 1.25 zu erhalten. Damit der Wert erhalten bleibt, wird die Zahl anschliessend wieder mit 10^2 multipliziert:*

$$125 = 1.25 \cdot 100 = 1.25 \cdot 10^2$$

Um die Zahl 0.0034 wissenschaftlich darzustellen, wird sie mit 1000 multipliziert, um 3.4 zu erhalten. Anschliessend wird sie mit einem Tausendstel multipliziert.

$$0.0034 = 3.4 \cdot \tfrac{1}{1000} = 3.4 \cdot 10^{-3}$$

Wissenschaftliche Schreibweise. In der wissenschaftlichen Schreibweise wird eine Zahl wie folgt geschrieben:

$$m \cdot 10^k \qquad 1 \leq |m| < 10$$

Dabei wird m die **Mantisse** genannt. Der Betrag der Mantisse muss zwischen 1 und 10 liegen. Der Exponent k ist eine entsprechend gewählte ganze Zahl.

Die Mantisse ist eine Zahl, welche genau eine Stelle vor dem Dezimalpunkt besitzt.

So kann nun geschrieben werden, dass die Sonne $1.5 \cdot 10^{11}$ m von der Erde entfernt ist und dass ein Atom etwa einen Radius von $1 \cdot 10^{-10}$ m hat.

4.6 SI-Präfixe

Für bestimmte Faktoren der Form 10^k gibt es bestimmte Präfixe, welche anstelle der wissenschaftlichen Schreibweise verwendet werden. So sagen wir vier Kilometer statt $4 \cdot 10^3$ m oder ein Gigabyte statt $1 \cdot 10^9$ B.

Diese Bezeichnungen sind durch das **internationale Einheitensystem SI** (französisch: *système international d'unités*) festgelegt.

Präfix	**Bezeichnung**	**Wert**
P – Peta	Billiarde (engl. *quadrillion*)	$10^{15} = 1'000'000'000'000'000$
T – Tera	Billion (engl. *trillion*)	$10^{12} = 1'000'000'000'000$
G – Giga	Milliarde (engl. *billion*)	$10^{9} = 1'000'000'000$
M – Mega	Million	$10^{6} = 1'000'000$
k – Kilo	Tausend	$10^{3} = 1000$
h – Hekt	Hundert	$10^{2} = 100$
da – Deka	Zehn	$10^{1} = 10$
–	–	$10^{0} = 1$
d – Dezi	Zehntel	$10^{-1} = 0.1$
c – Zenti	Hundertstel	$10^{-2} = 0.01$
m – Milli	Tausendstel	$10^{-3} = 0.001$
μ – Mikro	Millionstel	$10^{-6} = 0.000\ 001$
n – Nano	Milliardstel	$10^{-9} = 0.000\ 000\ 001$
p – Piko	Billionstel	$10^{-12} = 0.000\ 000\ 000\ 001$
f – Femto	Billiardstel	$10^{-15} = 0.000\ 000\ 000\ 000\ 001$

Achtung: Der englische Begriff «billion» bedeutet nicht eine Billion, sondern eine Milliarde. Ein:e «billionaire» ist also ein:e Milliardär:in. Der englische Begriff «trillion» bedeutet eine Billion.

5 Bruchterme

Ein Bruchterm entsteht, wenn bei einem Bruch im Zähler oder im Nenner eine oder mehrere Variablen vorkommen.

Beispiel. *Bruchterme sind* $\frac{x+1}{3}$ $\quad$ $\frac{2}{x+1}$ $\quad$ $\frac{x^2-4}{x-2}$

Kommt die Variable nur im Zähler vor, so kann der Bruchterm ganz einfach in einen «normalen» Term umgewandelt werden, indem der Zähler aus dem Bruch herausgenommen wird:

Beispiel. $\frac{x+1}{3} = \frac{1}{3}(x+1)$

In den folgenden Abschnitten steht der Umgang mit Bruchtermen im Zentrum: ihre Definitionsmenge zu bestimmen, sie zu kürzen und mit ihnen zu rechnen.

5.1 Definitionsmenge

Wie bei einem Bruch mit Zahlen darf der Nenner eines Bruchterms nie den Wert Null annehmen. Die Werte der Variable, bei denen der Nenner Null wird, sind daher nicht erlaubt.

Definitionsmenge. Die Menge aller erlaubten Werte der Variable ist die Definitionsmenge.

Das sind alle Zahlen, für welche das Ergebnis des Terms berechnet werden kann, wenn sie für die Variable eingesetzt werden.

Anmerkung: Hier werden nur Terme mit einer Variable betrachtet. Bei Termen mit mehreren Variablen ist die Definitionsmenge komplizierter aufgebaut.

Um die Definitionsmenge zu bestimmen, wird der Nenner Null gesetzt. Die Lösungsmenge dieser Gleichung wird von der Grundmenge subtrahiert.

Beispiel. *Um die Definitionsmenge von* $\frac{2}{x+1}$ *zu bestimmen, wird der Nenner Null gesetzt, also* $x+1=0$*. Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist* $L=\{-1\}$*, also muss diese von der Grundmenge* $\mathbb{Q}$ *subtrahiert werden. Die Definitionsmenge ist somit* $D_x = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$*.*

Um die Definitionsmenge von $\frac{3x+1}{x^2-9}$ *zu bestimmen, wird der Nenner Null gesetzt, also* $x^2-9 = (x+3)(x-3)=0$*. Nach dem Satz vom Nullprodukt ist die Lösungsmenge dieser Gleichung* $L=\{-3;\ 3\}$ *und die Definitionsmenge des Terms ist somit* $D_x = \mathbb{Q} \setminus \{-3;\ 3\}$*.*

Hinweis: Die Definitionsmenge wird immer am **ursprünglichen**, ungekürzten Term abgelesen. Der Bruchterm $\frac{x}{x(x-5)}$ ist für $x=0$ und $x=5$ nicht definiert, auch wenn sich der Faktor x später kürzen lässt: $D_x = \mathbb{Q} \setminus \{0;\ 5\}$.

5.2 Kürzen

Ein Bruchterm wird **gekürzt**, indem ein gemeinsamer Faktor von Zähler und Nenner entfernt wird. Der Wert des Bruchterms bleibt dabei gleich.

Beispiel. $\dfrac{5x^2}{15x} = \dfrac{\cancel{5x} \cdot x}{\cancel{5x} \cdot 3} = \dfrac{x}{3}$ $\qquad$ $\dfrac{4x^2y}{12xy^3} = \dfrac{\cancel{4xy} \cdot x}{\cancel{4xy} \cdot 3y^2} = \dfrac{x}{3y^2}$

NUR PRODUKTE WERDEN GEKÜRZT!

Wenn der Zähler oder Nenner eines Bruchs eine Summe oder eine Differenz ist, darf nicht gekürzt werden.

Beispiel. *Hier darf nicht gekürzt werden:* $\dfrac{x+3}{x} \neq \dfrac{\cancel{x}+3}{\cancel{x}} = 3$

In diesem Fall muss der Zähler oder Nenner zuerst mit Hilfe der Faktorisierung in ein Produkt umgeformt werden. Dazu stehen bekannte Methoden zur Verfügung: Distributivgesetz, binomische Formeln und der Zweiklammeransatz.

Distributivgesetz. Ist in einer Summe jeder Summand ein Vielfaches des gleichen Terms, so kann dieser als gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Beispiel. $\dfrac{2x+4}{x+2} = \dfrac{2(x+2)}{x+2} = \dfrac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 2$

Binomische Formeln. Die drei binomischen Formeln lassen sich rückwärts anwenden, um eine Summe in ein Produkt umzuformen:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	erste binomische Formel
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	zweite binomische Formel
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	dritte binomische Formel

Beispiel. $\dfrac{x^2-25}{x^2+10x+25} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{(x+5)^2} = \dfrac{\cancel{(x+5)}(x-5)}{\cancel{(x+5)}(x+5)} = \dfrac{x-5}{x+5}$

Stehen im Zähler und im Nenner Potenzen derselben Basis, so werden sie gemäss dem Potenzgesetz «Quotient mit gleicher Basis» gekürzt: Die Potenzen werden dividiert, indem die Exponenten subtrahiert werden.

Quotient mit gleicher Basis.

$$\frac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$$

Beispiel. $\dfrac{12x^5}{4x^3} = \dfrac{12}{4}x^{5-3} = 3x^2$ $\qquad$ $\dfrac{6x^2y^3}{2x^5y} = \dfrac{6}{2}x^{2-5}y^{3-1} = 3x^{-3}y^2 = \dfrac{3y^2}{x^3}$

5.3 Multiplizieren und Dividieren

Beim Multiplizieren zweier Bruchterme werden die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert. Beim Dividieren wird der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert.

Multiplikation und Division. Bruchterme werden wie folgt multipliziert und dividiert:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{(a) \cdot (c)}{(b) \cdot (d)} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{(a) \cdot (d)}{(b) \cdot (c)}$$

Dabei muss beachtet werden, dass Zähler und Nenner der einzelnen Brüche in Klammern gesetzt werden müssen, falls es sich um Summen oder Differenzen handelt.

Beispiel. $\dfrac{2x}{x+3} \cdot \dfrac{x+3}{4x^2} = \dfrac{2x \cdot \cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)} \cdot 4x^2} = \dfrac{\cancel{2x}}{\cancel{2x} \cdot 2x} = \dfrac{1}{2x}$

Beispiel. $\dfrac{x^2-4}{x} : \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{x^2-4}{x} \cdot \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x}} \cdot \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x+2}} = x-2$

5.4 Addieren und Subtrahieren

Um Bruchterme zu addieren oder zu subtrahieren, müssen sie zuerst gleichnamig gemacht werden. Dazu werden die einzelnen Nenner zuerst faktorisiert. Anschliessend werden die einzelnen Brüche mit den fehlenden Faktoren im Nenner erweitert.

Beispiel. *Der Hauptnenner ist* $x(x+2)$*, der erste Bruch wird mit* $x+2$ *erweitert, der zweite mit* x*.*

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = \frac{1 \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)} + \frac{3 \cdot x}{(x+2) \cdot x} = \frac{x+2+3x}{x(x+2)} = \frac{4x+2}{x(x+2)}$$

Beispiel. *Der Hauptnenner ist* x^2*, nur der zweite Bruch muss mit* x *erweitert werden. Bei der Subtraktion gehört das Minuszeichen vor den* ***ganzen*** *zweiten Zähler, deshalb unbedingt Klammern setzen.*

$$\frac{2}{x} - \frac{x+1}{x^2} = \frac{2 \cdot x}{x \cdot x} - \frac{x+1}{x^2} = \frac{2x-(x+1)}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Nach dem Addieren oder Subtrahieren wird der neue Zähler vereinfacht und faktorisiert. Anschliessend wird überprüft, ob sich der Bruchterm kürzen lässt.

6 Bruchgleichungen

6.1 Einleitung

Bruchgleichungen sind Gleichungen mit Bruchtermen, bei welchen die Variable im Nenner vorkommt. Dies führt zu zwei Punkten, welche beachtet werden müssen:

- Der Wert für die Variable darf nicht so gewählt werden, dass der Nenner Null wird.
- Alle Bruchterme müssen aus der Gleichung entfernt werden.

Für das Lösen von Bruchgleichungen kann immer das folgende Vorgehen angewendet werden:

1. Nenner faktorisieren.
2. Definitionsmenge D bestimmen.
3. Bruchterme eliminieren (Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner).
4. Gleichung lösen.
5. Lösungsmenge L angeben.

Im folgenden werden die einzelnen Schritte im Detail erläutert.

6.2 Nenner faktorisieren

Zunächst sollten die Nenner der Bruchterme so weit wie möglich faktorisiert werden. Dies ist nötig, um die Definitionsmenge zu bestimmen und um das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner zu ermitteln.

Im folgenden Beispiel kann im linken Nenner der Faktor 2 ausgeklammert werden, im rechten Nenner der Faktor x.

$$\frac{x}{x^2+3x}+\frac{3}{x}=\frac{6}{2x}-\frac{1}{2x+6} \quad \Big| \quad \text{faktorisieren}$$

$$\frac{x}{x(x+3)}+\frac{3}{x}=\frac{6}{2x}-\frac{1}{2(x+3)}$$

6.3 Definitionsmenge bestimmen

Die Definitionsmenge der Gleichung muss so eingeschränkt werden, dass der Nenner nie Null werden kann.

$$\frac{x}{x(x+3)}+\frac{3}{x}=\frac{6}{2x}-\frac{1}{2(x+3)}$$

Wenn die Nenner der Gleichung faktorisiert sind, können die problematischen Werte für x sofort abgelesen werden. Im Beispiel sind es -3 und 0. Diese müssen aus der Grundmenge, der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ entfernt werden, in Mengenschreibweise:

$$D=\mathbb{Q}\setminus\{-3;\ 0\}$$

6.4 Bruchterme eliminieren

Nun wird das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner ermittelt. Wird die Gleichung mit diesem Term multipliziert, können anschliessend alle Bruchterme weggekürzt werden.

$$\frac{x}{x(x+3)} + \frac{3}{x} = \frac{6}{2x} - \frac{1}{2(x+3)}$$

Im Beispiel sind im Nenner die Faktoren 2, x und $(x+3)$ vorhanden, es wird also mit diesen Faktoren multipliziert. Anschliessend werden die Bruchterme gekürzt.

$$\frac{x}{x(x+3)} + \frac{3}{x} = \frac{6}{2x} - \frac{1}{2(x+3)} \quad \Big| \quad \cdot 2x(x+3)$$

$$\frac{2x(x+3)\cdot x}{x(x+3)} + \frac{2x(x+3)\cdot 3}{x} = \frac{2x(x+3)\cdot 6}{2x} - \frac{2x(x+3)\cdot 1}{2(x+3)} \quad \Big| \quad \text{kürzen}$$

$$2\cdot x + 2(x+3)\cdot 3 = (x+3)\cdot 6 - x\cdot 1$$

Wenn alle Bruchterme weggefallen sind, bleibt eine Polynomgleichung übrig, welche mit bekannten Methoden gelöst werden kann.

6.5 Lineare Gleichung lösen

Wenn nun eine lineare Gleichung entsteht, kann diese nach bekanntem Vorgehen gelöst werden:

$$\begin{aligned}
2x + 2(x+3)\cdot 3 &= (x+3)\cdot 6 - x\cdot 1 && \text{ausmultiplizieren}\\
2x + 6x + 18 &= 6x + 18 - x && \text{zusammenfassen}\\
8x + 18 &= 5x + 18 && -18\\
8x &= 5x && -5x\\
3x &= 0 && :3\\
x &= 0
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet $L = \{0\}$. Dies ist aber nicht die Lösungmenge der Bruchgleichung!

6.6 Lösungsmenge angeben

Die Lösungsmenge L muss immer eine Teilmenge der Definitionsmenge D sein.

Beim vorliegenden Beispiel ist 0 nicht in der Definitionsmenge und somit auch nicht in der Lösungsmenge der Bruchgleichung. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge:

$$L = \{\}$$