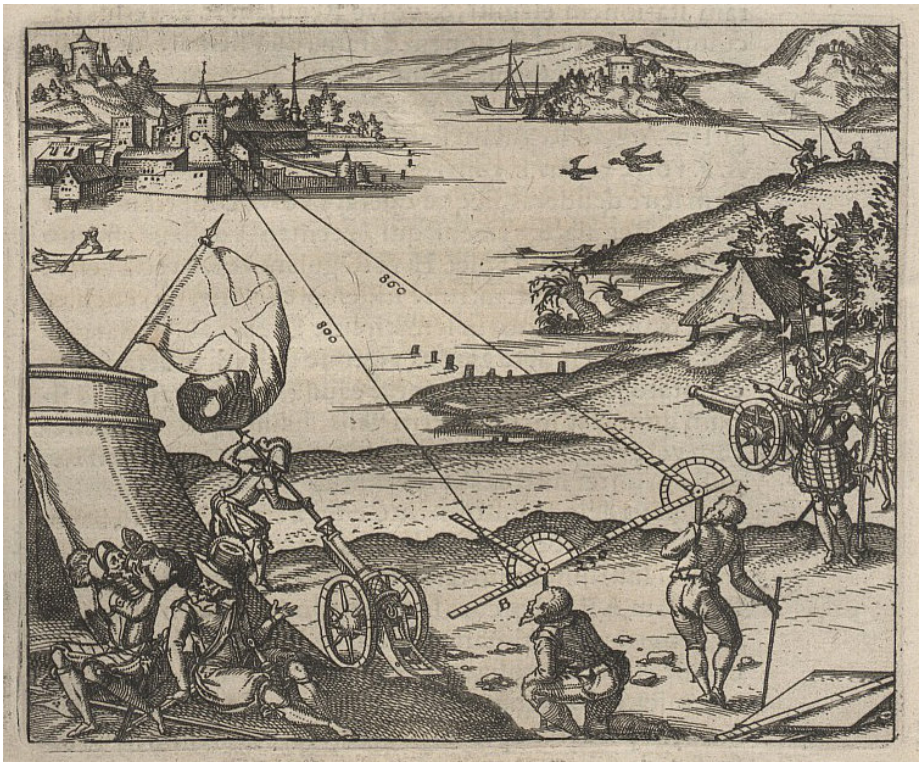
Trigonometrie

Stefan Rothe

14.11.2026



Inhaltsverzeichnis

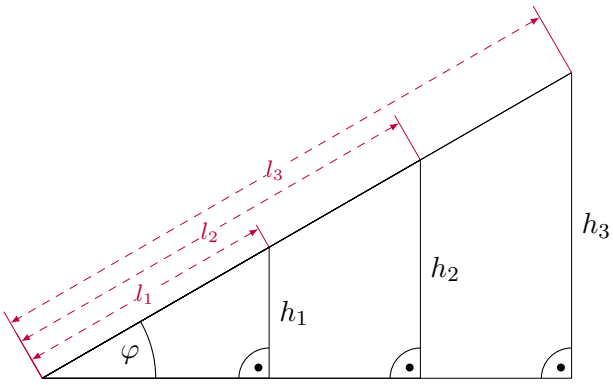
1 Sinus und Kosinus **2**
2 Tangens und Steigung **6**
3 Sinus- und Kosinussatz **8**
4 Berechnungen am allgemeinen Dreieck **10**
5 Definition am Einheitskreis **15**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Sinus und Kosinus

1.1 Motivation

Das Bild unten rechts zeigt einen Hebekran, welcher eine Strassenlaterne anhebt. Dazu muss der Hebearm genügend lang ausgefahren werden. Wie kann die nötige Armlänge l für eine vorgegebene Hubhöhe h berechnet werden?





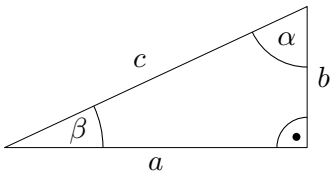
Der Hebearm l bildet mit der Hubhöhe h ein rechtwinkliges Dreieck. Gemäss dem zweiten Strahlensatz ist für einen festen Winkel φ des Arms das Verhältnis $\frac{h}{l}$ konstant. Wenn dieser Wert für den eingestellten Winkel bekannt ist, kann aus der benötigen Hubhöhe die Armlänge ermittelt werden.

1.2 Begriffe

Im rechtwinkligen Dreieck wird die einem Winkel gegenüberliegende Kathete **Gegenkathete** genannt. Die Gegenkathete von α ist also die Seite a, die Gegenkathete von β ist b.

Die an den Winkel anliegende Kathete heisst **Ankathete**. Die Ankathete von α ist b, die Ankathete von β ist a.

Mit Hilfe dieser Begriffe werden die Seitenverhältnisse $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ benannt.



Sinus und Kosinus. Im rechtwinkligen Dreieck wird das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse Sinus genannt, das Verhältnis von Ankathete zu Hypotenuse heisst Kosinus.

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Ankathete von } \beta}{\text{Hypotenuse}} = \cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Gegenkathete von } \beta}{\text{Hypotenuse}} = \sin(\beta)$$

Beispiel. *Beim Hebekran ist das Verhältnis von Hubhöhe h und Länge des Arms l der Sinus von φ.*

$$\sin(\varphi) = \frac{h}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad l = \frac{h}{\sin(\varphi)}$$

Diese Gleichung kann nach der Armlänge l aufgelöst werden. Damit kann die benötigte Armlänge für eine bestimmte Hubhöhe berechnet werden.

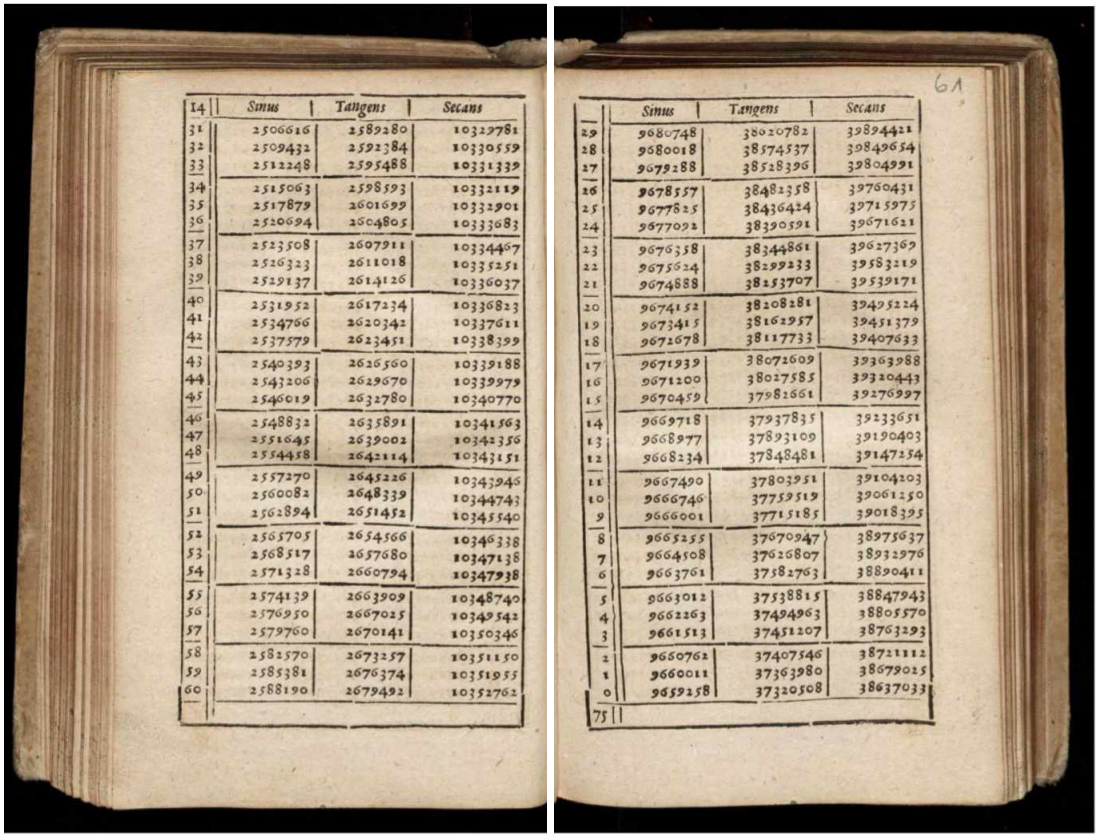
Soll die maximale Hubhöhe für eine bestimmte Armlänge berechnet werden, so wird die Gleichung nach h aufgelöst:

$$\sin(\varphi) = \frac{h}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad h = l \cdot \sin(\varphi)$$

1.3 Werte von Sinus und Kosinus

Die Werte von Sinus und Kosinus für vorgegebene Winkel können im allgemeinen mathematisch nicht genau berechnet werden. Mit aufwändigen Verfahren können aber Näherungen ermittelt werden.

Deshalb wurden früher Tabellen mit diesen Näherungen als Bücher veröffentlicht. Das folgende Bild zweigt zwei Seiten aus dem *Manuale Mathematicum* von Matthias Bernegger aus dem Jahr 1619. Dieses Buch enthielt unter anderem Tabellen für Sinus und Tangens auf fast 400 Seiten.



14	Sinus	Tangens	Secans
31	2506616	2589280	10329781
32	2509432	2592384	10330559
33	2512248	2595488	10331339
34	2515063	2598593	10332119
35	2517879	2601699	10332901
36	2520694	2604805	10333683
37	2523508	2607911	10334467
38	2526323	2611018	10335251
39	2529137	2614126	10336037
40	2531952	2617234	10336823
41	2534766	2620342	10337611
42	2537579	2623451	10338399
43	2540393	2626560	10339188
44	2543206	2629670	10339979
45	2546019	2632780	10340770
46	2548832	2635891	10341563
47	2551645	2639002	10342356
48	2554458	2642114	10343151
49	2557270	2645226	10343946
50	2560082	2648339	10344743
51	2562894	2651452	10345540
52	2565705	2654566	10346338
53	2568517	2657680	10347138
54	2571328	2660794	10347938
55	2574139	2663909	10348740
56	2576950	2667025	10349542
57	2579760	2670141	10350346
58	2582570	2673257	10351150
59	2585381	2676374	10351955
60	2588190	2679492	10352762

61

	Sinus	Tangens	Secans
29	9680748	38020782	39894421
28	9680018	38574537	39849654
27	9679288	38528396	39804991
26	9678557	38482358	39760431
25	9677825	38436424	39715975
24	9677092	38390591	39671621
23	9676358	38344861	39627369
22	9675624	38299233	39583219
21	9674888	38253707	39539171
20	9674152	38208281	39495224
19	9673415	38162957	39451379
18	9672678	38117733	39407633
17	9671939	38072609	39363988
16	9671200	38027585	39320443
15	9670459	37982661	39276997
14	9669718	37937835	39233651
13	9668977	37893109	39190403
12	9668234	37848481	39147254
11	9667490	37803951	39104203
10	9666746	37759519	39061250
9	9666001	37715185	39018395
8	9665255	37670947	38975637
7	9664508	37626807	38932976
6	9663761	37582763	38890411
5	9663012	37538815	38847943
4	9662263	37494963	38805570
3	9661513	37451207	38763293
2	9660762	37407546	38721112
1	9660011	37363980	38679025
0	9659258	37320508	38637033

75

Heute werden diese Näherungen direkt mit dem Taschenrechner berechnet werden.

TI-30X MathPrint: Sinus und Kosinus berechnen

- Sinus berechnen: sin, Winkel eingeben, enter drücken.
- Kosinus berechnen: cos, Winkel eingeben, enter drücken.

Beispiel. *Der Winkel des Hebekrans ist auf* $\varphi = 65°$ *eingestellt. Mit dem Taschenrechner wird* $\sin(65°) \approx 0.906$ *ermittelt.*

Nun kann berechnet werden, auf welche Länge der Arm mindestens ausgefahren werden muss, um eine Hubhöhe von 20 m *zu erhalten:*

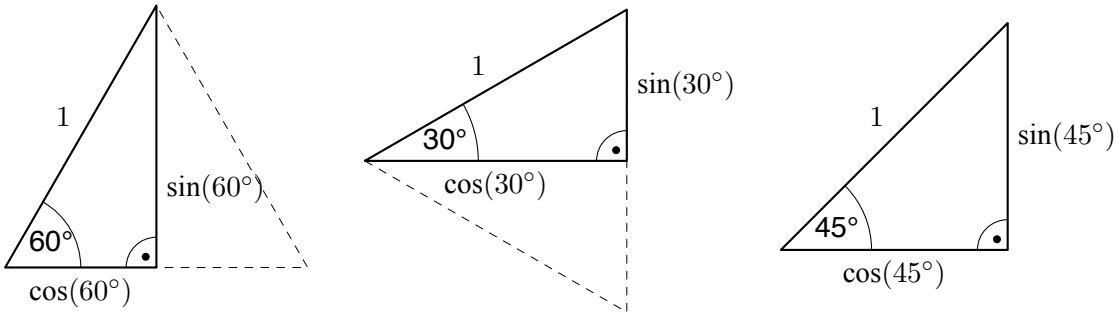
$$l = \frac{h}{\sin(\varphi)} = \frac{20}{\sin(65°)} \approx \frac{20}{0.906} \approx 22.068\,\text{m}$$

m Ebenfalls kann die maximale Hubhöhe für maximale Armlänge von 35 m *berechnet werden:*

$$h = l \cdot \sin(\varphi) = 35 \cdot \sin(65°) \approx 35 \cdot 0.906 = 31.71\,\text{m}$$

1.4 Spezielle Werte von Sinus und Kosinus

Für einige spezielle Winkel können die Werte von Sinus und Kosinus genau bestimmt werden. Dazu werden die folgenden speziellen Dreiecke betrachtet:



Spezielle Werte von Sinus und Kosinus. Die folgenden Werte von Sinus und Kosinus können mathematisch genau bestimmt werden:

$$\sin(30°) = \frac{1}{2} \qquad \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(60°) = \frac{1}{2}$$

Beispiel. *Wenn der Arm des Hebekrans auf einen Winkel von* $30°$ *eingestellt wird, entspricht die Hubhöhe* h *immer der Hälfte der Armlänge* l*.*

1.5 Arkussinus und Arkuskosinus

Wenn im rechtwinkligen Dreieck ein Seitenverhältnis bekannt ist, der Winkel jedoch nicht, so kann dieser ebenfalls mit Hilfe der trigonometrischen Tabellen ermittelt werden. Dabei wird die Tabelle umgekehrt verwendet: Das entsprechende Seitenverhältnis wird gesucht und der Winkel abgelesen.

Arkussinus und Arkuskosinus. Im rechtwinkligen Dreieck wird der Winkel, der zu einem gegebenen Seitenverhältnis von Gegenkathete und Hypotenuse gehört, als Arkussinus bezeichnet. Analog wird der Winkel zu einem Verhältnis von Ankathete und Hypotenuse Arkuskosinus genannt.

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) = \arccos\left(\frac{b}{c}\right) \qquad \beta = \arccos\left(\frac{b}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$$

Die Arkusfunktionen werden nicht einheitlich bezeichnet. Manchmal wird der Arkussinus als asin geschrieben. Im englischen Sprachraum und auf Taschenrechnern werden die Arkusfunktionen mit einem hochgestellten -1 bezeichnet, also

$$\sin^{-1}(\alpha) = \arcsin(\alpha) \qquad \cos^{-1}(\alpha) = \arccos(\alpha)$$

TI-30X MathPrint: Arkussinus und Arkuskosinus berechnen

- Arkussinus berechnen: 2× sin, Wert eingeben, enter drücken.
- Arkuskosinus berechnen: 2× cos, Wert eingeben, enter drücken.

Beispiel. *Der Hebekran hat eine maximale Armlänge von* 35 m*. Auf welchen Winkel muss der Arm mindestens eingestellt werden, um eine Hubhöhe von* 33 m *zu erhalten?*

Hier ist nun das Seitenverhältnis, also des Sinus, bekannt und der Winkel muss ermittelt werden. Dazu wird mit dem Taschenrechner der Arkussinus des Verhältnisses berechnet:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{33}{35}\right) \approx 70.537°$$

Der Arm muss also auf einen Winkel von mindestens 70° *eingestellt werden.*

2 Tangens und Steigung

2.1 Definition

Das Verhältnis der beiden Katheten bleibt gemäss dem ersten Stahlensatz ebenfalls konstant für einen bestimmten Winkel. Es verdient auch einen eigenen Namen und wird Tangens genannt.

Tangens. Im rechtwinkligen Dreieck wird das Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Ankathete als Tangens des Winkels bezeichnet.

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete von } \beta}{\text{Ankathete von } \beta}$$

Auch beim Tangens gibt es eine Umkehrung.

Arkustangens. Im rechtwinkligen Dreieck wird der Winkel, der zu einem gegebenen Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete gehört, als Arkustangens bezeichnet.

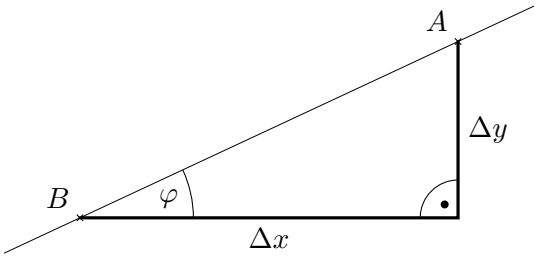
$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \qquad \beta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

2.2 Steigung und Steigungswinkel

Der Begriff der Steigung wurde bereits bei den linearen Funktionen wie folgt definiert: Ist eine lineare Funktion $f(x)$ mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = mx + q$$

gegeben, so wird m als Steigung des Funktionsgraphen bezeichnet. Geometrisch betrachtet ist m das Verhältnis der vertikalen zu der horizontalen Distanz zweier Punkte A und B auf dem Graphen.



Es gilt also

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Das die Distanzen Δx und Δy zusammen mit der Geraden ein rechtwinkliges Dreieck bilden, ist das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Tangens des Steigungswinkels φ der Geraden.

Steigungswinkel. Für eine lineare Funktion $f(x) = mx + q$ mit der Steigung m entspricht der Arkustangens der Steigung dem Steigungswinkel φ des Funktionsgraphen.

$$\varphi = \arctan(m) = \tan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Umgekehrt kann aus dem Steigungswinkel die Steigung berechnet werden.

Steigung. Hat eine Gerade einen Steigungswinkel von φ, dann ist die Steigung m der zugehörigen Funktionsgleichung der Tangens des Winkels.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\varphi)$$

Beispiel. *Unser Hebekran soll in einer Entfernung von* 25 m *eine Strassenlaterne anheben und benötigt dort eine Hubhöhe von mindestens* 15 m*.*

Mit dem Arkustangens kann der minimale Armwinkel φ berechnet werden:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{15}{25}\right) \approx 30.964^\circ$$

Beispiel. *Bahnstrecken dürfen einen maximalen Steigungswinkel von* 0.23° *haben. Um wie viel Meter darf eine neue Strecke mit einer Länge von* 3 km *maximal ansteigen?*

Dazu wird die Steigungsformel nach Δy aufgelöst:

$$\Delta y = \Delta x \cdot \tan(\varphi) = 3000 \cdot \tan(0.23^\circ) \approx 12.043\,\text{m}$$

Die Strecke darf also maximal um 4 m *ansteigen.*

Beispiel. *Eine neue Strecke steigt auf einer Distanz von* 8 km *um* 30 m *an.*

Mit dem Arkustangens kann der Steigungswinkel berechnet werden:

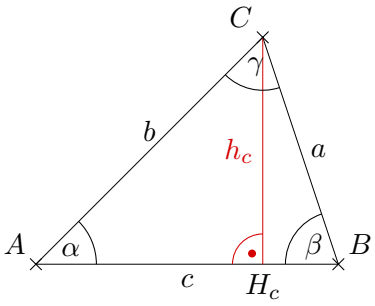
$$\varphi = \arctan\left(\frac{30}{8000}\right) \approx 0.021^\circ$$

Der Steigungswinkel der Strecke liegt also noch knapp unter dem zugelassenen Maximum.

3 Sinus- und Kosinussatz

3.1 Sinussatz

Um Berechnungen mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen im allgemeinen Dreieck anstellen zu können, wird zunächst im allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ die Höhe h_c eingezeichnet. Damit entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, in welchen die trigonometrischen Beziehungen gelten.



Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AH_cC$ gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad h_c = b \cdot \sin(\alpha)$$

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BCH_c$ gilt

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad h_c = a \cdot \sin(\beta)$$

Da beide Gleichungen nach h_c aufgelöst werden können, kann h_c weggelassen werden:

$$b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$$

Wird die Gleichung durch $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ dividiert, ergibt sich:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Wird die gleiche Überlegung analog für die Höhe h_a durchgeführt, so entsteht die Gleichung:

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Diese Gleichungen werden zum Sinussatz zusammengefasst:

Sinussatz: In jedem beliebigen Dreieck ist das Verhältnis der Länge der Seite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels konstant.

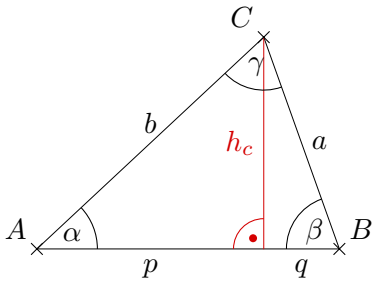
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Der Sinussatz kann auch mit den Kehrwerten geschrieben werden:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

3.2 Kosinussatz

Um Dreiecke in den Fällen SSS und SWS berechnen zu können, reicht der Sinussatz nicht. Deshalb wird hier der Kosinussatz hergeleitet. Wiederum wird von einem allgemeinen Dreieck ausgegangen, in welches die Höhe h_c eingezeichnet wird.



Die Höhe h_c unterteilt die Seite c in zwei Abschnitte p und q. Diese können durch den Kosinus ausgedrückt werden:

$$\cos(\alpha) = \frac{p}{b} \quad \Longrightarrow \quad p = b \cdot \cos(\alpha) \qquad \cos(\beta) = \frac{q}{a} \quad \Longrightarrow \quad p = a \cdot \cos(\beta)$$

Die Seite c kann also so ausgedrückt werden:

$$c = p + q = b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\beta)$$

Wird die Gleichung mit c multipliziert, ergibt sich:

$$c^2 = bc \cdot \cos(\alpha) + ac \cdot \cos(\beta)$$

Mit analogen Überlegungen ergibt sich für die anderen Seiten des Dreiecks:

$$a^2 = ab \cdot \cos(\gamma) + ac \cdot \cos(\beta) \qquad b^2 = ab \cdot \cos(\gamma) + bc \cdot \cos(\alpha)$$

Nun werden diese zwei Gleichungen addiert:

$$a^2 + b^2 = ac \cdot \cos(\beta) + bc \cdot \cos(\alpha) + 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Schliesslich können die zwei ersten Summanden links durch c^2 ersetzt werden:

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Diese Gleichung wird in leicht abgeänderter Form als Kosinussatz bezeichnet. Damit kann aus den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks der Winkel γ berechnet werden.

Kosinussatz: In jedem beliebigen Dreieck gelten die folgenden Beziehungen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \qquad \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Ist γ ein rechter Winkel, so ist $\cos(\gamma) = 0$ und der Term $-2ab \cdot \cos(\gamma)$ fällt somit weg. Dadurch entsteht der Satz des Pythagoras als Spezialfall des Kosinussatzes.

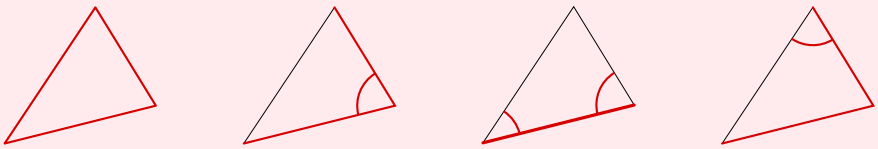
4 Berechnungen am allgemeinen Dreieck

4.1 Kongruenzsätze am Dreieck

Aus der Planimetrie sind die Kongruenzsätze am Dreieck bekannt. Diese werden hier wiederholt:

Kongruenzsätze am Dreieck: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn

- alle drei Seitenlängen übereinstimmen **(SSS)**.
- zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel übereinstimmen **(SWS)**.
- eine Seitenlänge und die beiden anliegenden Winkel übereinstimmen **(WSW)**.
- zwei Seitenlängen und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel übereinstimmen **(SSW)**.



SSS SWS WSW SsW

Wenn also wie oben angegeben Seiten und Winkel eines allgemeinen Dreiecks bekannt sind, so ist das Dreieck eindeutig definiert und die restlichen Seiten und Winkel des Dreiecks müssen berechnet werden können.

Im folgenden wird betrachtet, wie die fehlenden Angaben mit Hilfe des Sinus- und Kosinussatzes berechnet werden können.

4.2 Fall SSS

Wenn bei einem Dreieck alle drei Seiten vorgegeben sind, ist es eindeutig bestimmt. Die Winkel können rechnerisch mit Hilfe des Kosinussatzes ermittelt werden.

Beispiel. *Von einem Dreieck sind die Seiten* $a = 12\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$ *und* $c = 14\,\text{cm}$ *bekannt. Berechnen Sie die Winkel.*

Der Winkel γ kann sofort mit dem Kosinussatz berechnet werden:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Beispiel. $\gamma = \arccos\left(\dfrac{12^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 12 \cdot 10}\right) = \arccos\left(\dfrac{48}{240}\right) = \arccos(0.2) \approx 78.46^\circ$

Der Winkel β wird mit dem entsprechend angepassten Kosinussatz berechnet:

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

Beispiel. $\beta = \arccos\left(\dfrac{12^2 + 14^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 14}\right) = \arccos\left(\dfrac{240}{336}\right) = \arccos(0.714) \approx 44.44^\circ$

Der Dritte Winkel α kann mit der Innenwinkelsumme berechnet werden:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$

Beispiel. $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 44.44^\circ - 78.46^\circ = 57.10^\circ$

4.3 Fall SWS

Wenn bei einem Dreieck zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel vorgegeben sind, ist es eindeutig bestimmt. Die fehlenden Seiten und Winkel können rechnerisch mit Hilfe des Kosinussatzes ermittelt werden.

Beispiel. *Von einem Dreieck sind die Seiten* $a = 12\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$ *und* $\gamma = 50^\circ$ *bekannt. Berechnen Sie die Winkel.*

Die Seite c kann sofort mit dem Kosinussatz berechnet werden:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)}$$

Beispiel. $c = \sqrt{12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos(50^\circ)} \approx \sqrt{244 - 240 \cdot 0.643} \approx 9.470\,\text{cm}$

Nun sind alle drei Seiten bekannt. Somit kann nun der Winkel β mit dem Kosinussatz berechnet werden: Der Winkel β wird mit dem entsprechend angepassten Kosinussatz berechnet:

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

Beispiel. $\beta \approx \arccos\left(\dfrac{12^2 + 9.470^2 - 10^2}{2 \cdot 9.470 \cdot 14}\right) = \arccos(0.588) \approx 53.972^\circ$

Der Dritte Winkel α kann mit der Innenwinkelsumme berechnet werden:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$

Beispiel. $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 53.972^\circ - 50^\circ = 76.028^\circ$

4.4 Fall WSW

Sind von einem Dreieck zwei Winkel und eine Seite bekannt, so kann folgendermassen vorgegangen werden.

Beispiel. *Von einem Dreieck sind* $c = 14\,\text{cm}$, $\alpha = 57.1^\circ$ *und* $\beta = 44.4^\circ$. *Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel.*

Wenn zwei Winkel bekannt sind, kann mit Hilfe der Innenwinkelsumme der dritte Winkel berechnet werden:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Beispiel. *Der Winkel γ kann so berechnet werden:*

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 57.1° - 44.4° = 78.5°$$

Nun wird der Sinussatz nach a aufgelöst:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{c \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$

Die Werte für c, γ und α sind bekannt und können eingesetzt werden, um a zu berechnen.

Beispiel. $a = \dfrac{c \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \dfrac{14\,\text{cm} \cdot \sin(57.1°)}{\sin(78.5°)} \approx 11.99\,\text{cm}$

Analog wird der Sinussatz nach b aufgelöst:

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

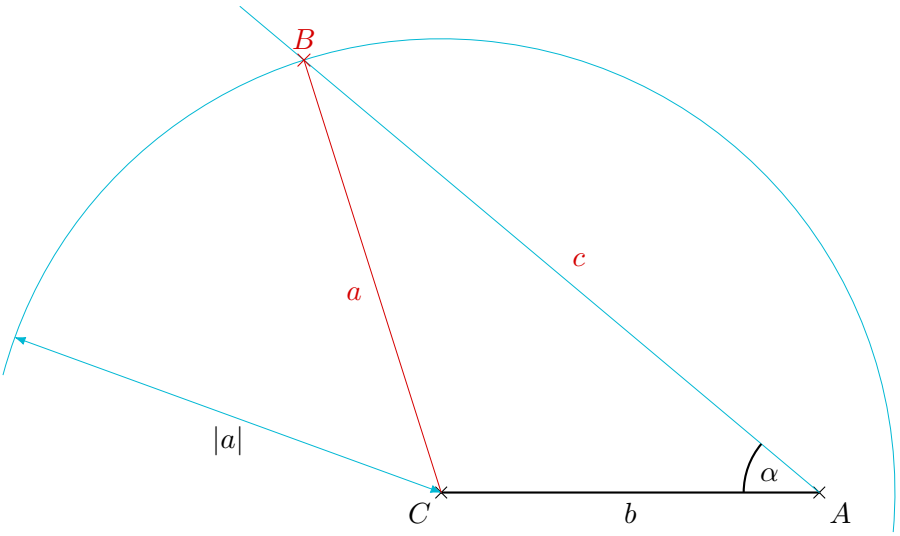
Beispiel. $a = \dfrac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \dfrac{14\,\text{cm} \cdot \sin(44.4°)}{\sin(78.5°)} \approx 9.99\,\text{cm}$

4.5 Fall SsW

Sind von einem Dreieck zwei Seiten bekannt sowie der Winkel, welcher **der längeren Seite gegenüberliegt**, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

Um das Dreieck geometrisch zu konstruieren, wird zunächst die Seite b mit den Endpunkten C und A gezeichnet. Von der Seite c ist die Länge nicht bekannt, sie bildet aber mit der Seite b den bekannten Winkel α. Also muss die Ecke B auf dem Strahl liegen, der von A ausgeht und mit der Seite b den Winkel α bildet. Von der Seite a ist die Länge bekannt. Also muss die Ecke B auf einem Kreis mit Radius $|a|$ und Mittelpunkt C liegen.

Da der Kreisradius $|a|$ grösser ist als die Seite b, gibt es genau einen Schnittpunkt zwischen dem Strahl und dem Kreis. Dort liegt die Ecke B.



Mit dem Sinussatz können auch in diesem Fall die fehlenden Winkel β und γ sowie die fehlende Seite c berechnet werden.

Beispiel. *Von einem Dreieck sind* $a = 6$, $b = 5$ *und* $\alpha = 40°$ *bekannt. Berechnen Sie die restlichen Seiten und Winkel.*

Da die Seite a und der gegenüberliegende Winkel α bekannt sind, ist das Verhältnis des Sinussatzes bekannt. Da auch b bekannt ist, kann der Sinussatz nach $\sin(\beta)$ aufgelöst werden. Dabei ist es einfacher, wenn von der zweiten Schreibweise des Sinussatz ausgegangen wird:

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}$$

Beispiel. $\sin(\beta) = \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = \dfrac{5 \cdot \sin(40°)}{6} \approx 0.5356$

Da nun der Sinus von β bekannt ist, kann mit dem Arkussinus der Winkel β ermittelt werden.

$$\beta = \arcsin(\sin(\beta))$$

Beispiel. $\beta \approx \arcsin(0.5356) \approx 32.39°$

Da nun zwei Winkel bekannt sind, kann der dritte berechnet werden:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$

Beispiel. $\gamma \approx 180° - 40° - 32.39° \approx 107.61°$

Da γ nun bekannt ist, kann mit dem Sinussatz die Länge der Seite c berechnet werden:

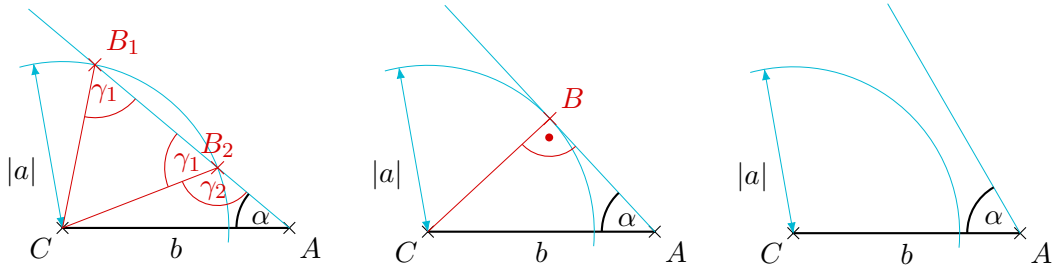
$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

Beispiel. $c = \dfrac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{6 \cdot \sin(108.61°)}{\sin(40°)} \approx 8.90$

4.6 Sonderfall sSW

Sind von einem Dreieck zwei Seiten bekannt sowie der Winkel, welcher **der kürzeren Seite gegenüberliegt**, so ist das Dreieck **nicht** eindeutig bestimmt. Um dies nachzuvollziehen, wird wiederum zunächst die geometrische Konstruktion betrachtet. Diese beginnt analog zum Fall SsW.

Da der Kreisradius $|a|$ nun aber kleiner ist als die Seite b, kann es zwei, einen oder gar keinen Schnittpunkt zwischen dem Kreis und dem Strahl geben:



Im ersten Fall gibt es zwei mögliche Orte für die Ecke B, die als B_1 und B_2 bezeichnet werden. Dadurch entstehen zwei unterschiedliche Dreiecke $\triangle AB_1C$ und $\triangle AB_2C$. Anhand des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle CB_2B_1$ ist ersichtlich, dass sich die Winkel γ_1 und γ_2 der beiden Lösungen zu 180° ergänzen, also:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$$

Im zweiten Fall ist der Strahl eine Tangente an den Kreis und die Ecke b liegt auf dem Berührungspunkt. Damit entsteht ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$.

Im dritten Fall gibt es keinen Schnittpunkt und somit kein Dreieck, dass diese Bedingungen erfüllt.

Nun wird betrachtet, wie die fehlenden Seiten und Winkel rechnerisch mit Hilfe des Sinussatzes bestimmt werden können.

Beispiel. *Von einem Dreieck sind $a = 5$, $b = 6$ und $\alpha = 40^\circ$ bekannt. Berechnen Sie die restlichen Seiten und Winkel.*

Da die Seite a und der gegenüberliegende Winkel α bekannt sind, ist das Verhältnis des Sinussatzes bekannt. Da auch b bekannt ist, kann der Sinussatz nach $\sin(\beta)$ aufgelöst werden. Dabei ist es einfacher, wenn von der zweiten Schreibweise des Sinussatz ausgegangen wird:

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}$$

Beispiel. $\sin(\beta) = \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = \dfrac{6 \cdot \sin(40^\circ)}{5} \approx 0.771$

Hier müssen nun Überlegungen zu den Anzahl Lösungen gemacht werden. Angenommen, die Aufgabe wäre mit $\alpha = 70^\circ$ gestellt worden. Dann würde sich für $\sin(\beta)$ der folgende Wert ergeben:

$$\sin(\beta) = \frac{6 \cdot \sin(40^\circ)}{5} \approx 1.128$$

Da der Sinus eines Winkels immer zwischen -1 und 1 liegt, gibt es keinen Winkel β, der diesen Sinuswert hat. Somit hätte die Aufgabenstellung mit $\alpha = 70°$ keine Lösung.

Falls sich $\sin(\beta) = 1$ ergeben würde, so ist der zugehörige Winkel $\beta = 90°$. Damit würde der Fall vorliegen, wo es eine Lösung gibt.

Ist $\sin(\beta) < 1$, so gibt es zwei Lösungen, nämlich β und $(180° - \beta)$.

Anzahl Lösungen für sSW: Die Anzahl Lösungen für den sSW-Fall wird rechnerisch anhand des Werts für $\sin(\beta)$ bestimmt:

- $\sin(\beta) > 1$: keine Lösung.
- $\sin(\beta) = 1$: eine Lösung $\beta = 90°$.
- $\sin(\beta) < 1$: zwei Lösungen $\beta_1 = \arcsin(\sin(\beta))$ und $\beta_2 = 180° - \beta_1$.

Nach diesen Überlegungen wird (falls möglich) der Winkel β_1 mit dem Arkussinus bestimmt und anschliessend die zweite Lösung β_2 berechnet.

$$\beta_1 = \arcsin(\sin(\beta)) \qquad \beta_2 = 180° - \beta_1$$

Beispiel. $\beta_1 \approx \arcsin(0.771) \approx 50.44°$ $\qquad$ $\beta_2 = 180° - 50.44° = 129.56°$

Da nun zwei Winkel bekannt sind, kann der dritte Winkel berechnet werden. Auch hier kann es zwei Lösungen geben:

$$\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 \qquad \gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2$$

Beispiel. $\gamma_1 \approx 180° - 40° - 50.44° \approx 89.56°$ $\qquad$ $\gamma_2 \approx 180° - 40° - 129.56° \approx 10.44°$

Da γ nun bekannt ist, kann mit dem Sinussatz die Länge der Seite c berechnet werden. Hier gibt es ebenfalls zwei Lösungen:

$$c_1 = \frac{a \cdot \sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha)} \qquad c_2 = \frac{a \cdot \sin(\gamma_2)}{\sin(\alpha)}$$

Beispiel. $c_1 = \dfrac{6 \cdot \sin(89.56°)}{\sin(40°)} \approx 9.33$ $\qquad$ $c_2 = \dfrac{6 \cdot \sin(10.44°)}{\sin(40°)} \approx 1.69$

5 Definition am Einheitskreis

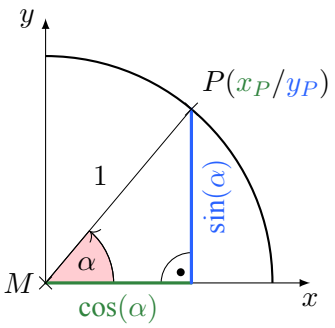
5.1 Definition am Dreieck

Bisher haben wir $\sin$ und $\cos$ am rechtwinkligen Dreieck definiert als Verhältnis von Gegenkathete bzw. Ankathete und Hypotenuse. Im rechtwinkligen Dreieck können aber Winkel höchtens 90° gross werden. Es ist also mit dieser Definition nicht möglich, den Sinus oder Kosinus eines grösseren Winkels zu berechnen.

Deshalb werden Sinus und Kosinus nun mit Hilfe des Einheitskreises definiert. Damit ist es möglich, die Winkelfunktionen für beliebige Winkel zu definieren.

5.2 Definition am Einheitskreis

Auf dem Einheitskreis wird ein Punkt P eingezeichnet. Der Punkt wird senkrecht nach unten mit der x-Achse verbunden und direkt mit dem Mittelpunkt M. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gerade den Koordinaten des Punkts P entsprechen.



Da die Hypotenuse des Dreiecks die Länge 1 hat, ergibt sich gemäss bisheriger Definition für Sinus und Kosinus:

$$x_P = \frac{\cos(\alpha)}{1} = \cos(\alpha) \qquad y_P = \frac{\sin(\alpha)}{1} = \sin(\alpha)$$

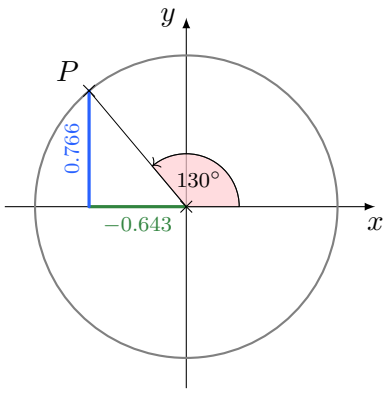
Daraus wird die neue Definition von Sinus und Kosinus am Einheitskreis abgeleitet.

Definition Sinus und Kosinus. Der Punkt $P(P_x/P_y)$ ist ein Punkt auf dem Einheitskreis, der Winkel α ist der Winkel zwischen der x-Achse und dem Strahl, der vom Mittelkpunkt M aus durch P geht. Dann ist der Sinus von α die y-Koordinate von P und der Kosinus von α ist die x-Koordinate von P.

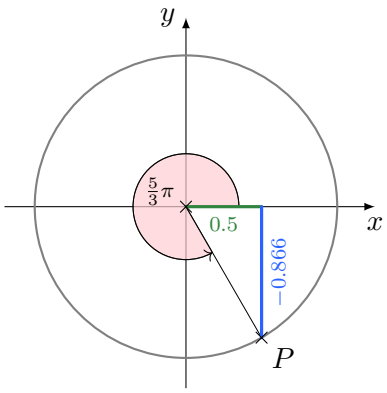
$$\sin(\alpha) := y_P \qquad \cos(\alpha) := x_P$$

Mit dieser Definition können Sinus und Kosinus für beliebige Winkel ermittelt werden.

Beispiel. *Sinus und Kosinus von* 130° *und* 300° *ermittelt werden.*



$\alpha = 130°$



$\alpha = 300°$

Die Winkel werden ausgehend von der x-Achse im Gegenuhrzeigersinn abgemessen. Der Punkt P wird an der entsprechenden Position auf dem Einheitskreis eingetragen. Durch Messen der x- und y-Koordinate des Punkts können Kosinus und Sinus ermittelt werden.

$$\cos(130^\circ) \approx -0.643 \qquad \sin(130^\circ) \approx 0.766$$
$$\cos(300^\circ) = 0.5 \qquad \sin(300^\circ) \approx -0.866$$

Es fällt auf, dass Sinus und Kosinus auch negative Werte annehmen können.

5.3 Satz des Pythagoras

Am rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras. Wird dieser auf das betrachtete Dreieck im Einheitskreis angewendet, gilt:

$$x_P^2 + y_P^2 = 1$$

Werden nun x_P und y_P gemäss Definition durch Kosinus und Sinus ersetzt, so ergibt sich der folgende Satz.

Trigonometrischer Satz des Pythagoras. Für Sinus und Kosinus gilt:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Hinweis: Als Abkürzung wird das Quadrat bei Sinus und Kosinus direkt hinter $\sin$ bzw. $\cos$ geschrieben. Es gilt (analog für $\cos$):

$$\sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2 = \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

5.4 Periodizität

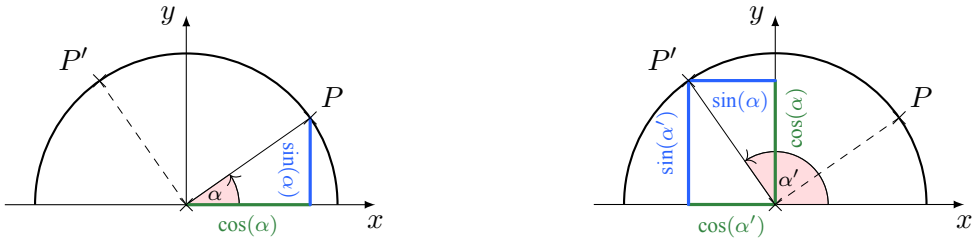
Ein Winkel grösser 360° am Einheitskreis bedeutet, dass der Punkt P mehr als eine ganze Umdrehung auf dem Kreis gemacht hat. Sinus und Kosinus bleiben aber für jede Umdrehung gleich. Diese Überlegung führt zu folgenden Formeln:

Periodizität. Für Sinus und Kosinus gelten folgende Eigenschaften:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 360^\circ) \qquad \sin(\alpha) = \sin(\alpha + 360^\circ)$$

5.5 Drehung um 90°

Wenn der Punkt P um 90° um den Ursprung rotiert, dann entspricht die x-Koordinate des Bildpunkts P' der negativen y-Koordinate von P. Die y-Kooridnate des Bildpunkts ist gleich der x-Koordinaten von P.



Werden die Koordinaten mit Sinus und Kosinus ausgedrückt, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\sin(\alpha') = \cos(\alpha) \qquad \cos(\alpha') = -\sin(\alpha)$$

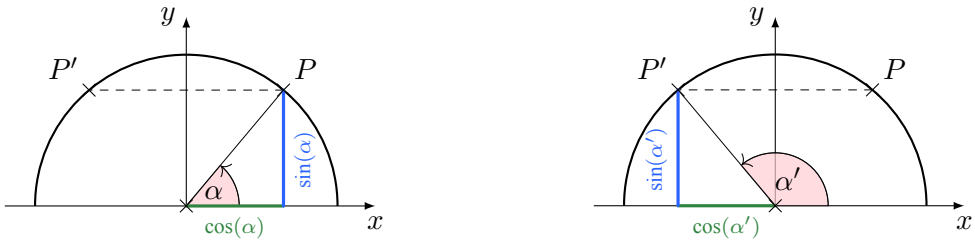
Wegen der Drehung um 90° ist $\alpha' = \alpha + 90°$. Damit ergeben sich folgende Formeln für Sinus und Kosinus:

Drehung um 90°. Für alle Winkel α gilt:

$$\sin(90° + \alpha) = \cos(\alpha) \qquad \cos(90° + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

5.6 Spiegelung an y-Achse

Nun betrachten wir, was passiert, wenn der Punkt P an der y-Achse gespiegelt wird. Der Bildpunkt P' hat die gleiche y-Koordinate wie P, die x-Koordinate wird negiert.



Übertragen auf Kosinus und Sinus bedeutet dies:

$$\sin(\alpha') = \sin(\alpha) \qquad \cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$$

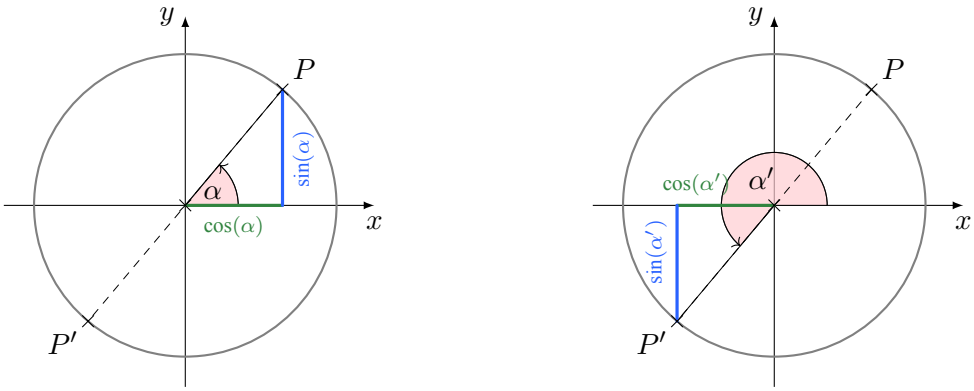
Ausserdem ist ersichtlich, dass sich die Winkel α und α' zu 180° ergänzen. Also ist $\alpha' = 180° - \alpha$. Damit ergeben sich die folgenden Gleichungen:

Spiegelung an y-Achse. Für alle Winkel α gilt:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha) \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

5.7 Punktspiegelung

Nun betrachten wir, was passiert, wenn der Punkt P am Ursprung gespiegelt wird. Dabei ergeben sich die Koordinaten des Bildpunkts P', indem das Vorzeichen der entsprechenden Koordinaten von P gewechselt wird.



Übertragen auf Kosinus und Sinus bedeutet dies:

$$\sin(\alpha') = -\sin(\alpha) \qquad \cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$$

Da eine Punktspiegelung identisch zu einer Drehung um 180° ist, gilt $\alpha' = \alpha + 180°$. Damit ergeben sich die folgenden Formeln:

Punktspiegelung. Für alle Winkel α gilt:

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \cos(180° + \alpha) = -\cos(\alpha)$$