Komponenten

1. **Zeichnen.** Sie von einem beliebigen Punkt aus die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Anschliessend zeichnen und berechnen Sie die folgenden Vektoren:

   (a) $\vec{a} + \vec{b}$

   Lösung: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}$

   (b) $\vec{a} - \vec{b}$

   Lösung: $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$

   (c) $\vec{b} - \vec{a}$

   Lösung: $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}}$

   (d) $2\vec{a}$

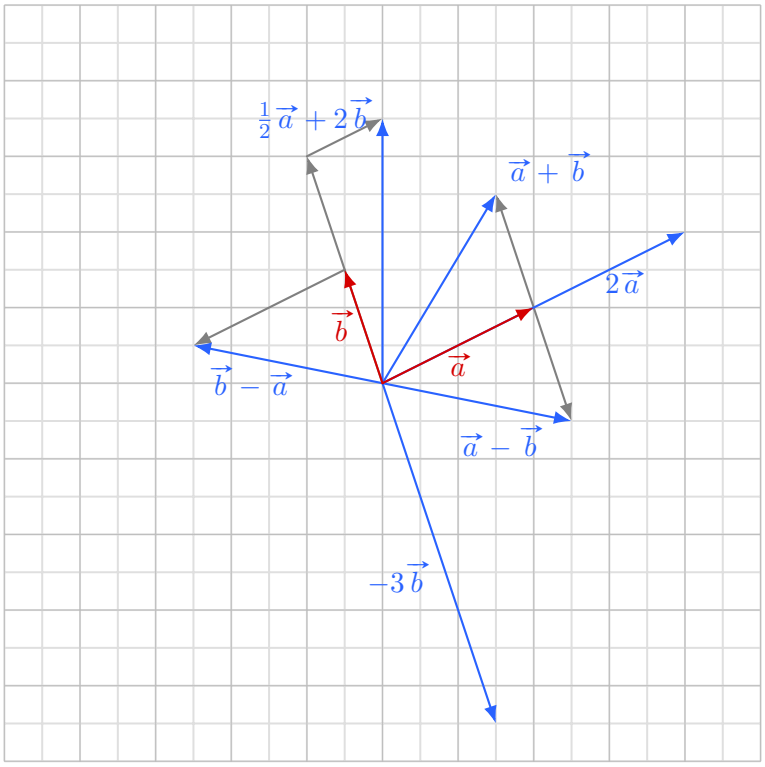
   Lösung: $2\vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}}$

   (e) $-3\vec{b}$

   Lösung: $-3\vec{b} = -3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}}$

   (f) $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

   Lösung: $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}}$



2. Rechnen. Gegeben Sie die folgenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

(a) $3\vec{a}$

Lösung: $3\vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}}$

(b) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

Lösung: $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 - 2 \\ -2 + 3 - 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

(c) $-\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$

Lösung: $-\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = -\begin{pmatrix} -1 - 4 \\ 3 - (-2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}}$

(d) $\frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{a}\right)$

Lösung: $\frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 + 4 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -0.5 \end{pmatrix}}$

(e) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

Lösung: $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) + 2 \\ 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 + 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 13 \\ -12 \end{pmatrix}}$

(f) $-\vec{c} + 3\vec{b}$

Lösung: $-\vec{c} + 3\vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3 \cdot (-1) \\ -1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}}$

3. **Vektor aus Punkten.** Geben Sie die Komponentendarstellung des Vektors $\overrightarrow{AB}$ an und berechnen Sie dessen Länge.

(a) $A(3/1)$ $B(6/5)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

(b) $A(2/4)$ $B(7/2)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{29}} \approx \boxed{5.3852}$$

(c) $A(4/-2)$ $B(1/3)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \boxed{\sqrt{34}} \approx \boxed{5.8310}$$

(d) $A(2/7)$ $B(-4/6)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{37}} \approx \boxed{6.0828}$$

4. **Endpunkte.** Die Anfangspunkte und die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ sind gegeben. Ermitteln Sie die Koordinaten des Endpunkts.

(a) $A(1/2)$ $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B(4/6)}$$

(b) $A(3/5)$ $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B(7/3)}$$

(c) $A(4/-2)$ $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B(1/3)}$$

(d) $A(-6/3)$ $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B(-1/-5)}$$

5. **Parallelogramm.** 🏆 Ermitteln Sie den fehlenden Eckpunkt sowie den Umfang des Parallelogramms $ABCD$.

(a) $A(-1/-5)$ $\quad B(7/1)$ $\quad C(3/4)$

Lösung: $\boxed{D(-5/-2) \qquad u = 30}$

(b) $A(-10/2) \qquad B(2/-3) \qquad D(-7/6)$

Lösung: $\boxed{C(5/1) \qquad u = 36}$

(c) $A(1/3) \qquad C(1/-3) \qquad D(5/1)$

Lösung: $\boxed{B(-3/-1) \qquad u = 20.3}$

6. Streckenteilung. 🏆

(a) Teilen Sie die Strecke $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile. Finden Sie also die Punkte T_1 und T_2 auf der Strecke, sodass die Strecken $\overline{AT_1}$, $\overline{T_1T_2}$ und $\overline{T_2B}$ gleich lang sind.

$A(-8/13) \qquad B(7/-2)$

Lösung: Die Strecke $\overline{AB}$ wird durch die Punkte $\boxed{T_1(-3/8)}$ und $\boxed{T_2(2/3)}$ in drei gleiche Teile geteilt.

(b) Finden Sie die Koordinaten des Punkts T, welcher die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 3:1 teilt.

$A(82/-15) \qquad B(77/22)$

Lösung: Je nachdem, von welcher Seite ausgegangen wird, gibt es zwei mögliche Lösungen:

ausgehend von A : $\boxed{T(80.75/-5.75)}$

ausgehend von B : $\boxed{T(78.25/12.75)}$

(c) Finden Sie die Koordinaten des Punkts T, welcher die Strecke im Verhältnis 7:2 teilt.

$A(-44/33) \qquad B(-8/-102)$

Lösung: Je nachdem, von welcher Seite ausgegangen wird, gibt es zwei mögliche Lösungen:

ausgehend von A : $\boxed{T(-36/3)}$

ausgehend von B : $\boxed{T(-16/-72)}$

7. Dreieck. 🏆 Bestimmen Sie den Umfang und den Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

(a) $A(4/1) \qquad B(1/5) \qquad C(2/-2)$

Lösung: $\boxed{u \approx 15.6766 \qquad S\left(2.333\overline{3}/1.333\overline{3}\right)}$

(b) $A(-4/-2)$ $B(-2/0)$ $C(8/7)$

Lösung: $\boxed{u \approx 30.0350 \qquad S\left(0.666\overline{6}/1.666\overline{6}\right)}$

(c) $A(3/-5)$ $B(8/2)$ $C(-6/1)$

Lösung: $\boxed{u \approx 33.4546 \qquad S\left(1.666\overline{6}/-0.666\overline{6}\right)}$