Winkel zwischen Vektoren

1. **Winkel.** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Wie gross ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren?

   (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   $$\vec{a} \circ \vec{b} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11$$
   $$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
   $$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$
   $$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{11}{5 \cdot \sqrt{5}}\right) \approx \arccos(0.9899) \approx \boxed{8.13°}$$

   (b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -2 - 2 = -4$$
   $$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$
   $$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$
   $$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}\right) = \arccos(-0.8) \approx \boxed{143.13°}$$

   (c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 1 + 5 \cdot (-3) = -2 - 15 = -17$$
   $$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$
   $$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$
   $$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-17}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{10}}\right) \approx \arccos(-0.998) \approx \boxed{177.4°}$$

   (d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 = 12 - 12 = 0$$

   Damit ist der Kosinus des gesuchten Winkels gleich Null. Das bedeutet, dass der Winkel $\boxed{90°}$ beträgt.

(e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2 + 3 = 5$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$
$$\cos(\varphi) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{45°}$$

(f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = -3 - 4 = -7$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{17}}\right) \approx \arccos(-0.5328) \approx \boxed{122.4°}$$

2. Parallel 1. Sind die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ parallel?

(a) $A(-2/3) \quad B(0/6) \quad C(4/-1) \quad D(8/5)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es ist $\overrightarrow{CD} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$, sie sind also parallel.

(b) $A(6/6) \quad B(7/1) \quad C(3/4) \quad D(5/4)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-6 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ -NoValue- \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die y-Komponente kann kein Faktor gefunden werden, sie sind nicht parallel.

(c) $A(-1/2) \quad B(4/5) \quad C(6/3) \quad D(1/0)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-(-1) \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es ist $\overrightarrow{CD} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB}$, sie sind also parallel.

(d) $A(-2/3)$ $B(4/0)$ $C(3/4)$ $D(-1/6)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es ist $\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$, sie sind also parallel.

3. **Parallel 2.** Welche Zahl muss in der Lücke stehen, damit die Vektoren zu $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ parallel sind?

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ 8 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -25 \\ 10 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. **Senkrecht 1.** Stehen die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ senkrecht zueinander?

(a) $A(0/0)$ $B(6/2)$ $C(3/9)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Es ist $6 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 18 + 18 = 36$, sie sind also nicht senkrecht.

(b) $A(5/1)$ $B(2/4)$ $C(0/-4)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Es ist $(-3)\cdot(-5)+3\cdot(-5)=15-15=0$, sie sind senkrecht.

(c) $A(2/7)\quad B(8/3)\quad C(-4/-2)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}8-2\\3-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4-2\\-2-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-9\end{pmatrix}$$

Es ist $6\cdot(-6)+(-4)\cdot(-9)=-36+36=0$, sie sind senkrecht.

(d) $A(4/-4)\quad B(8/1)\quad C(0/-1)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}8-4\\1-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0-4\\-1-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

Es ist $4\cdot(-4)+5\cdot3=-16+15=-1$, sie sind nicht senkrecht.

5. **Senkrecht 2.** Welche Zahl muss in der Lücke stehen, damit die Vektoren senkrecht zu $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ stehen?

(a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$

(b) $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2.5\end{pmatrix}$

(c) $\vec{c}=\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$

(d) $\vec{d}=\begin{pmatrix}1.2\\3\end{pmatrix}$