Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie jeweils den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und seine Länge.

(a) $A(3/2) \quad B(6/5)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx \boxed{4.2426}$$

(b) $A(-1/2) \quad B(3/-4)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} \approx \boxed{7.2111}$$

(c) $A(-1/-3) \quad B(-1/0)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

(d) $A(0/0) \quad B(4/3)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

(e) $A(0/-2) \quad B(-2/0)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx \boxed{2.8284}$$

(f) $A(-1/-1) \quad B(-1/-1)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \boxed{0}$$

2. Berechnen Sie die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ und die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ -1+5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}}$$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

3. Ermitteln Sie die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes und den Umfang des Parallelogramms $ABCD$. Die Punkte sind im Gegenuhrzeigersinn angegeben.

(a) $A(1/-3) \quad B(5/1) \quad C(1/3)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} \approx 5.6569$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{20} \approx 4.4721$$
$$U = 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| + 2 \cdot |\overrightarrow{BC}| \approx 20.2580$$
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$

Umfang $\boxed{20.2580}$, Eckpunkt $\boxed{D(-3/-1)}$

(b) $A(3/4) \quad C(-1/-5) \quad D(7/1)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} \approx 10$$
$$U = 2 \cdot |\overrightarrow{AD}| + 2 \cdot |\overrightarrow{CD}| \approx 30$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$$

Umfang $\boxed{30}$, Eckpunkt $\boxed{B(-5/-2)}$

(c) $A(-4/1) \quad B(5/-2) \quad C(8/2)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9^2+(-3)^2} = \sqrt{90} \approx 9.4868$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$U = 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| + 2 \cdot |\overrightarrow{BC}| \approx 28.9736$$
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$$

Umfang $\boxed{28.9736}$, Eckpunkt $\boxed{D(-1/5)}$

(d) $A(-4/1)$ $C(5/-2)$ $D(3/-2)$

Lösung: Umfang $\boxed{19.2316}$, Eckpunkt $\boxed{B(-2/1)}$

(e) $B(2/-3)$ $C(-10/2)$ $D(-7/6)$

Lösung: Umfang $\boxed{36}$, Eckpunkt $\boxed{A(5/1)}$

(f) $A(4/4)$ $B(-8/-1)$ $D(7/0)$

Lösung: Umfang $\boxed{36}$, Eckpunkt $\boxed{C(-5/-5)}$

(g) $B(1/2)$ $C(-3/-2)$ $D(1/-4)$

Lösung:

(h) $A(-2/-1)$ $B(2/3)$ $D(0/2)$

Lösung:

4. Welche Zahl muss in die Lücke eingesetzt werden, damit die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel zueinander sind?

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$

Lösung: Hier kann für x eine beliebige Zahl ungleich Null eingesetzt werden.

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.333\overline{3} \end{pmatrix}$

(f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung: Hier gibt es keine Lösung.

5. Welche Zahl muss in die Lücke eingesetzt werden, damit die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen?

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung: Damit die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, muss das Skalarprodukt Null ergeben. Die fehlende Komponente wird mit z bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-6\\z\end{pmatrix} &= 0 && \text{Skalarprodukt ausrechnen}\\
2\cdot(-6)+3\cdot z &= 0 && \text{ausrechnen}\\
-12+3z &= 0 && +12\\
3z &= 12 && :3\\
z &= 4
\end{aligned}$$

Yuris Lösungsweg: Beim Skalarprodukt werden die beiden x-Komponenten und die beiden y-Komponenten multipliziert und addiert. Damit das Ergebnis Null ist, muss das Produkt der y-Komponenten gerade die Gegenzahl vom Produkt der x-Komponenten ergeben.

Hier ergibt das Produkt der x-Komponenten $2\cdot(-6) = -12$. Also muss die Zahl gefunden werden, welche mit 3 multipliziert 12 ergibt, und das ist die Zahl 4.

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$

Lösung: Damit die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, muss das Skalarprodukt Null ergeben. Die fehlende Komponente wird mit z bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}z\\8\end{pmatrix} &= 0 && \text{Skalarprodukt ausrechnen}\\
4\cdot z+(-3)\cdot 8 &= 0 && \text{ausrechnen}\\
4z-24 &= 0 && +24\\
4z &= 24 && :4\\
z &= 6
\end{aligned}$$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-8\\-2.666\overline{6}\end{pmatrix}$

Lösung: Damit die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, muss das Skalarprodukt Null ergeben. Die fehlende Komponente wird mit z bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-8\\z\end{pmatrix} &= 0 && \text{Skalarprodukt ausrechnen}\\
-1\cdot(-8)+3\cdot z &= 0 && \text{ausrechnen}\\
8+3z &= 0 && -8\\
3z &= -8 && :3\\
z &= \tfrac{-8}{3} = -2.666\overline{6}
\end{aligned}$$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

(e) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$

Lösung: Damit die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, muss das Skalarprodukt Null ergeben. Die fehlende Komponente wird mit z bezeichnet:

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-6\\z\end{pmatrix} = 0 \quad \left| \text{ Skalarprodukt ausrechnen} \right.$$
$$3 \cdot (-6) + 2 \cdot z = 0 \quad \left| \text{ ausrechnen} \right.$$
$$-18 + 2z = 0 \quad \left| +18 \right.$$
$$2z = 18 \quad \left| : 2 \right.$$
$$z = 9$$

(f) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$

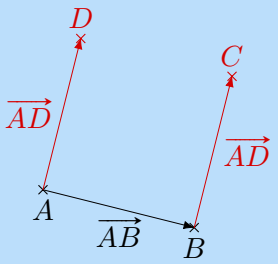
Lösung: Damit die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, muss das Skalarprodukt Null ergeben. Die fehlende Komponente wird mit z bezeichnet:

$$\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}z\\-6\end{pmatrix} = 0 \quad \left| \text{ Skalarprodukt ausrechnen} \right.$$
$$-3 \cdot z + 2 \cdot (-6) = 0 \quad \left| \text{ ausrechnen} \right.$$
$$-3z - 12 = 0 \quad \left| +3z \right.$$
$$-12 = 3z \quad \left| : 3 \right.$$
$$-4 = z$$

6. Von einem im Gegenuhrzeigersinn beschrifteten Quadrat kennt man die Endpunkte einer Seite. Ermitteln Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte.

(a) $A(-1/-1) \quad B(3/-2)$

Lösung:



Zuerst wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ berechnet:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{AD}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ und hat die gleiche Länge. Man erhält den Vektor, indem die Komponenten von $\overrightarrow{AB}$ vertauscht werden und dann die x-Komponente negiert wird.

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-(-1)\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

Nun können die fehlenden Eckpunkte berechnet werden:

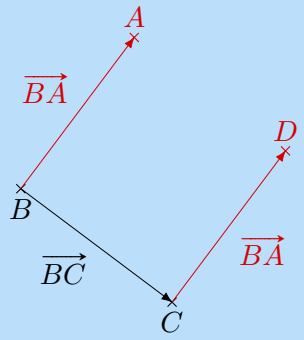
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die fehlenden Punkte lauten $\boxed{C(4/2)}$ und $\boxed{D(0/3)}$.

(b) $B(-4/2) \quad C(0/-1)$

Lösung:



$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vektor $\overrightarrow{BA}$ senkrecht auf $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

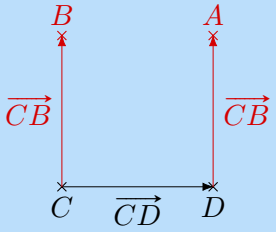
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die fehlenden Punkte lauten $\boxed{A(-1/6)}$ und $\boxed{D(3/3)}$.

(c) $C(-3/3) \quad D(3/3)$

Lösung:



$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektor $\overrightarrow{CB}$ senkrecht auf $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Die fehlenden Punkte lauten $\boxed{A(3/9)}$ und $\boxed{D(-3/9)}$.

(d) $A(-2/0) \quad D(3/0)$

Lösung:

(e) $A(3/0) \quad B(0/2)$

Lösung:

(f) $C(0/0) \quad B(3/-2)$

Lösung:

7. Berechnen Sie die Winkel, den Umfang und den Schwerpunkt im Dreieck ABC.

(a) $A(1/2) \qquad B(0/5) \qquad C(-2/-6)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \binom{0}{5} - \binom{1}{2} = \binom{-1}{3}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \binom{-2}{-6} - \binom{0}{5} = \binom{-2}{-11}$$
$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \binom{1}{2} - \binom{-2}{-6} = \binom{3}{8}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3.1623$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = \sqrt{125} \approx 11.1803$$
$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \approx 8.5440$$
$$U \approx 3.1623 + 11.1803 + 8.5440 = \boxed{22.8866}$$
$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \binom{-1}{3} \circ \binom{-3}{-8} = 3 - 24 = -21$$
$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \binom{1}{-3} \circ \binom{-2}{-11} = -2 + 33 = 31$$
$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \binom{3}{8} \circ \binom{2}{11} = 6 + 88 = 94$$
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CA}|}\right) \approx \arccos\left(\frac{-21}{3.1623 \cdot 8.5440}\right) \approx \boxed{141.0049°}$$
$$\beta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right) \approx \arccos\left(\frac{31}{3.1623 \cdot 11.1803}\right) \approx \boxed{28.7402°}$$
$$\gamma = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right) \approx \arccos\left(\frac{94}{8.5440 \cdot 11.1803}\right) \approx \boxed{10.24993°}$$

Kontrolle: $\alpha + \beta + \gamma = 179.9950°$

Der dritte Winkel kann auch mit der Innenwinkelsumme ermittelt werden. Hier wird er berechnet und anschliessend wird zur Kontrolle die Innenwinkelsumme ausgerechnet.

$$S = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 0 - 2 \\ 2 + 5 - 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.333\overline{3} \\ 0.333\overline{3} \end{pmatrix}$$

Der Schwerpunkt lautet $\boxed{S\left(-0.333\overline{3}/0.333\overline{3}\right)}$.

(b) $A(0/0)$ $B(-1/2)$ $C(-5/0)$

Lösung:

(c) $A(-1/8)$ $B(-3/-1)$ $C(2/0)$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(\begin{smallmatrix}-3\\-1\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}-1\\8\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-2\\-9\end{smallmatrix}\right)\\
\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}-3\\-1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}5\\1\end{smallmatrix}\right)\\
\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \left(\begin{smallmatrix}-1\\8\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-3\\8\end{smallmatrix}\right)\\
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(-2)^2 + (-9)^2} = \sqrt{85} \approx 9.2195\\
|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5.0990\\
|\overrightarrow{CA}| &= \sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73} \approx 8.5440\\
\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} &= \left(\begin{smallmatrix}-2\\-9\end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix}3\\-8\end{smallmatrix}\right) = 6 + 72 = 78\\
\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} &= \left(\begin{smallmatrix}-3\\-1\end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right) = -6 + 0 = -6\\
\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} &= \left(\begin{smallmatrix}-3\\8\end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix}2\\11\end{smallmatrix}\right) = 6 + 88 = 94
\end{aligned}$$

(d) $A(2/-1)$ $B(2/2)$ $C(-3/-1)$

Lösung:

8. Wie lauten die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke $\overline{AB}$?

(a) $A(1/2)$ $B(5/6)$

Lösung: Der Ortsvektor des Mittelpunkts M ergibt sich, wenn die Hälfte des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zum Ortsvektor von A addiert wird.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}5-1\\6-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $\boxed{M(3/4)}$.

(b) $A(-3/5)$ $B(3/3)$

Lösung: Der Ortsvektor des Mittelpunkts M ergibt sich, wenn die Hälfte des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zum Ortsvektor von A addiert wird.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}3-(-3)\\3-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $\boxed{M(0/4)}$.

(c) $A(0/0)$ $B(-4/4)$

Lösung: Der Ortsvektor des Mittelpunkts M ergibt sich, wenn die Hälfte des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zum Ortsvektor von A addiert wird.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-4-0\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $\boxed{M(-2/2)}$.

9. Von einem Quadrat sind die gegenüberliegenden Ecken A und C bekannt. Wie lauten die Koordinaten der anderen Eckpunkte B und D?

(a) $A(-3/-7) \quad C(5/3)$

Lösung:

(b) $A(5/-2) \quad C(-3/4)$

Lösung:

(c) $A(-1/4) \quad C(7/-2)$

Lösung:

(d) $A(4/-6) \quad C(-2/2)$

Lösung:

(e) $A(-1/-1) \quad C(1/1)$

Lösung:

(f) $A(-4/0) \quad C(4/-2)$

Lösung:

10. Wie lauten die Koordinaten des Punktes T, welcher die Strecke $\overline{AB}$ im angegebenen Verhältnis teilt?

(a) $A(-5/9) \quad B(9/2) \qquad 2:5$

Lösung: Zuerst wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ bestimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Nun wird $\frac{2}{7}$ des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ addiert:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{7} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{7} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+4 \\ 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $\boxed{P(-1/7)}$ teilt die Strecke im angegebenen Verhältnis.

(b) $A(-3/5) \quad B(9/11) \qquad 2:1$

Lösung: Zuerst wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ bestimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nun wird $\frac{2}{3}$ des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ addiert:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+8 \\ 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $\boxed{P(5/9)}$ teilt die Strecke im angegebenen Verhältnis.

(c) $A(-18/3) \quad B(6/-9) \qquad 7:5$

Lösung: Zuerst wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ bestimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Nun wird $\frac{7}{12}$ des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ addiert:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{7}{12} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{7}{12} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18+14 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $\boxed{P(-4/-4)}$ teilt die Strecke im angegebenen Verhältnis.

(d) $A(3/-4) \quad B(8/6) \qquad 2:3$

Lösung: Zuerst wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ bestimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Nun wird $\frac{2}{5}$ des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ addiert:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $\boxed{P(5/0)}$ teilt die Strecke im angegebenen Verhältnis.

(e) $A(-5/9) \quad B(9/2) \qquad 3:4$

Lösung: Zuerst wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ bestimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Nun wird $\frac{3}{7}$ des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ addiert:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{7} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 \\ 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $\boxed{P(1/6)}$ teilt die Strecke im angegebenen Verhältnis.

(f) $A(-3/5) \quad B(9/11) \qquad 3:1$

Lösung: Zuerst wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ bestimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nun wird $\frac{3}{4}$ des Vektors $\overrightarrow{AB}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ addiert:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+9 \\ 5+4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9.5 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $\boxed{P(6/9.5)}$ teilt die Strecke im angegebenen Verhältnis.