Musterprobe Vektorgeometrie 1

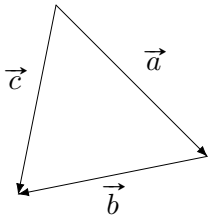
- Sie haben 80 Minuten Zeit.
- Sie dürfen den Taschenrechner und das Fundamentum verwenden.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Total	Note
max. Punkte	6	6	9	6	9	6	42	
Punkte								

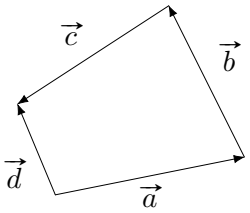
1. Addition. Schreiben Sie die zugehörige Vektorgleichung auf, ohne ein Minuszeichen zu verwenden. (6P)

Lösung: Bewertungsschema:

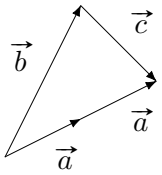
- Gleichung korrekt **1P**
- zusätzlich korrekte Notation **1P**



(a)



(b)



(c)

Lösung:

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

(b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

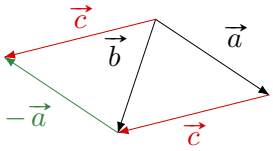
(c) $2\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

2. Subtraktion. Zeichnen Sie jeweils den Vektor $\vec{c}$ ein. (6P)

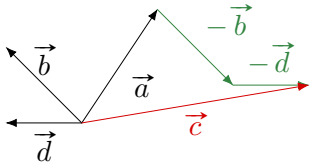
Lösung: Bewertungsschema:

- Richtung und Länge ungefähr korrekt **1P**
- zusätzlich ganz genau gezeichnet **1P**

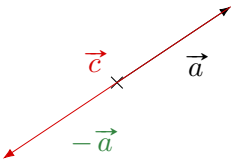
(a) $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$



(b) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{d}$



(c) $\vec{c} = 100\,\vec{a} - 102\,\vec{a}$



3. Rechnen mit Vektoren. **(9 P)**

Gegeben Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Bewertungsschema:

- passender Lösungsweg vorhanden **1P**
- zusätzlich korrekte Lösung **1P**
- zusätzlich korrekte Notation **1P**

Berechnen Sie die folgenden Vektoren.

(a) $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ (3P)

Lösung: $\vec{c} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2)-3 \\ 2\cdot 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}}$

(b) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ (3P)

Lösung: $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

(c) $\vec{e} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$ (3P)

Lösung: $\vec{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}}$

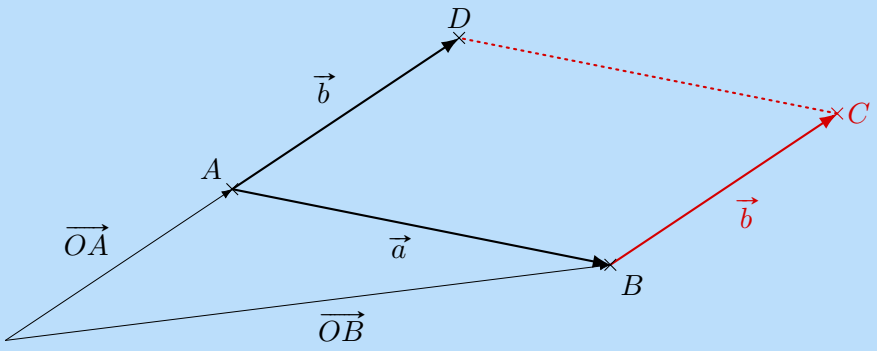
4. Parallelogramm. **(6 P)**

Gegeben sind die drei Punkte

$A(-3/-2) \qquad B(5/-5) \qquad D(10/7)$

(a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts C, sodass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet. (3P)

Lösung:



Zuerst werden die Seitenvektoren des Parallelogramms bestimmt.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-3) \\ -5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3 \\ -5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-(-3) \\ 7-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+3 \\ 7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Variante A: Der Punkt C erhält man, indem der Punkt B um den Vektor $\vec{b}$ verschiebt. Dazu wird $\vec{b}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$ addiert:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+13 \\ -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Variante B: Der Punkt C erhält man, indem der Punkt D um den Vektor $\vec{a}$ verschiebt. Dazu wird $\vec{a}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OD}$ addiert:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte vierte Punkt des Parallelogramms ist $\boxed{C(18/4)}$.

Bewertungsschema:

- Korrekte Formel für Berechnung des Ortsvektors **1P**
- zusätzlich korrekte Lösung als Punkt geschrieben **1P**
- zusätzlich korrekte Notation **1P**

(b) Berechnen Sie den Umfang des Parallelogramms $ABCD$. (3P)

Lösung: Der Umfang des Parallelogramms ergibt sich, indem die Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert und verdoppelt werden (Formel **1P**, Ergebnis **1P**).

$$\begin{aligned} U &= 2\left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right) = 2\left(\sqrt{8^2 + (-3)^2} + \sqrt{13^2 + 9^2}\right) \\ &= 2\left(\sqrt{73} + \sqrt{250}\right) \approx 2 \cdot (8.54 + 15.81) = 2 \cdot 24.35 = \boxed{48.70} \end{aligned}$$

Bewertungsschema:

- Korrekte Formel für Berechnung der Fläche **1P**
- zusätzlich korrekte Lösung **1P**
- zusätzlich korrekte Notation **1P**

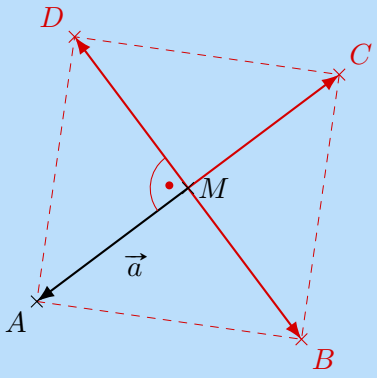
5. Quadrat. Gegeben ist der Mittelpunkt M und ein Eckpunkt A eines Quadrats $ABCD$. **(9 P)**

Hinweis: Im Mittelpunkt eines Quadrats schneiden sich die Diagonalen in einem rechten Winkel.

$M(7/2) \qquad A(3/-1)$

(a) Bestimmen Sie die restlichen Eckpunkte des Quadrats mit Hilfe der Vektorrechnung. Erstellen Sie eine Skizze, welche Ihren Lösungsweg veranschaulicht. (6P)

Lösung:



Sei $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$ der Vektor, der vom Mittelpunkt nach A zeigt (Idee **1P**, $\vec{a}$ korrekt **1P**)

$$\vec{a} = \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt C wird von M aus durch $-\vec{a}$ erreicht, die Punkte B und D durch Vektoren, die senkrecht auf $\vec{a}$ stehen. Also (je **1P**):

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die restlichen Eckpunkte des Quadrats sind $\boxed{B(10/-2)}$, $\boxed{C(11/5)}$ und $\boxed{D(4/6)}$ (je **1P**).

Bewertungsschema:

- Verständliche Skizze vorhanden **1P**
- korrekte Formel für $\overrightarrow{OC}$ **1P**
- C korrekt als Punkt **1P**
- B mit Lösungsweg **1P**
- D mit Lösungsweg **1P**
- zusätzlich korrekte Notation **1P**

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats. (3P)

Lösung: Die Seitenlänge beträgt $|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$, also hat das Quadrat eine Fläche von $\boxed{25}$.

Bewertungsschema:

- Korrekte Formel für Berechnung der Fläche **1P**
- zusätzlich korrekte Lösung **1P**
- zusätzlich korrekte Notation **1P**

6. Auswahl. Kreuzen Sie alle korrekten Antworten an. **(6 P)**

(a) Welche Eigenschaft hat ein Vektor? (1P)

- √ **eine Richtung**
- ◯ einen Ort
- ◯ Koordinaten
- ◯ eine Krümmung

(b) Ein Vektor mit der Länge 1 beginnt bei einem Punkt A. Wohin endet dieser Vektor? (1P)

- ◯ bei unendlich Punkten auf einem Kreis mit Radius 1 um A
- √ **bei genau einem Punkt** B
- ◯ bei genau zwei Punkten B und B' auf einer Geraden
- ◯ wieder bei Punkt A

(c) Welche Abbildung lässt sich durch einen Vektor darstellen? (1P)

- ◯ Drehung
- ◯ Spiegelung
- √ **Verschiebung**
- ◯ Zentrische Streckung

(d) Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Welches ist **keine** Bezeichnung für den Gegenvektor von $\vec{v}$? (1P)

- ◯ $-\vec{v}$
- ◯ $\overrightarrow{QP}$
- ◯ $-\overrightarrow{PQ}$
- √ $-\overrightarrow{QP}$

(e) Wann ist die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ länger als die einzelnen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$? (1P)

- ◯ immer
- √ **nie**
- ◯ wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind
- ◯ wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Gegenvektoren sind

(f) Gegeben ist der Punkt $A(2/1)$. Was trifft auf den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ **nicht** zu? (1P)

- ◯ Seine Länge entspricht dem Abstand von A zum Ursprung.
- √ **Er ist gleich dem Nullvektor.**
- ◯ Seine Komponentendarstellung lautet $\binom{2}{1}$.
- ◯ Er zeigt vom Ursprung zum Punkt A.