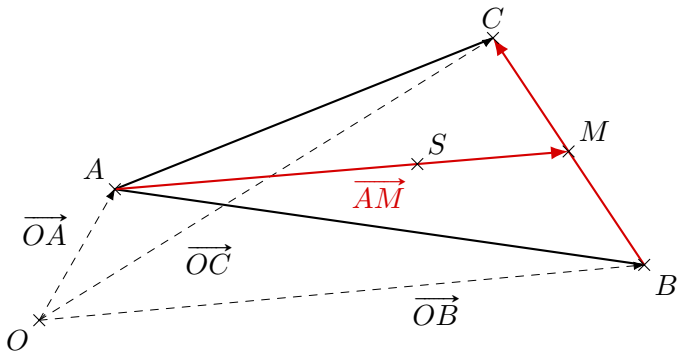
Vektorgeometrie 1

Vektoren in der Ebene

Stefan Rothe

12.06.2026



$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} = \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**
2 Komponentendarstellung **4**
3 Vektoren und Punkte **6**
4 Winkel zwischen Vektoren **9**
5 Anwendungen **12**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Einführung

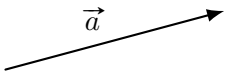
1.1 Vektorbegriff

Vektoren sind eine neues Grundelement der Mathematik, welche die Zahlen ergänzen. Im Gegensatz zu Zahlen besitzen Vektoren auch eine **Richtung**.

Ein Vektor kann als Verschiebung interpretiert werden.

1.2 Darstellung

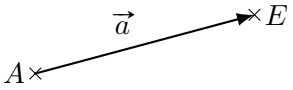
Ein Vektor $\vec{a}$ wird als Pfeil dargestellt und mit einem Kleinbuchstaben mit Pfeil beschriftet.



1.3 Definition durch Endpunkte

Ein Vektor $\vec{a}$ kann durch einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt E definiert werden. Dazu wird die folgende Schreibweise verwendet:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AE}$$

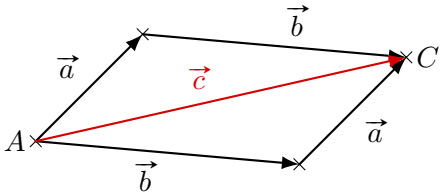


Da der Vektor gerichtet ist, ist die Reihenfolge der Punkte wichtig. Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ ist ein anderer Vektor als $\overrightarrow{AB}$.

1.4 Addition

Die Addition von Vektoren ist die Aneinanderreihung von Verschiebungen. Wird ein Punkt A zunächst um den Vektor $\vec{a}$ verschoben und anschliessend um den Vektor $\vec{b}$, so kommt der Punkt bei C zu liegen. Die gleiche Verschiebung entsteht, wenn der Punkt A um den Vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ verschoben wird:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

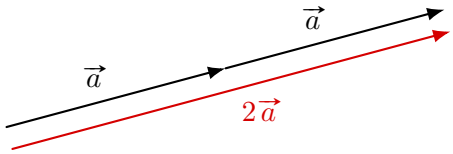


Die Addition von Vektoren ist **kommutativ**. Es spielt keine Rolle, ob der Vektor $\vec{b}$ an den Vektor $\vec{a}$ angehängt wird oder umgekehrt. Als Summe entsteht in beiden Fällen der gleiche Vektor $\vec{c}$. Die beiden Varianten der Addition bilden ein Parallelogramm.

1.5 Skalierung

Wird ein Vektor $\vec{a}$ zu sich selbst addiert, so entsteht ein paralleler Vektor zu $\vec{a}$ mit doppelter Länge. Der Vektor wird also zwei Mal genommen, geschrieben:

$$\vec{a} + \vec{a} = 2 \cdot \vec{a} = 2\vec{a}$$

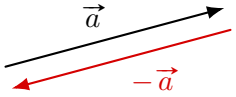


Allgemein kann das mehrfache Addieren des gleichen Vektors als Multiplikation mit einer natürlichen Zahl geschrieben werden:

$$n \cdot \vec{a} = n\vec{a} := \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \cdots + \vec{a}}_{n-\text{mal}}$$

1.6 Gegenvektor

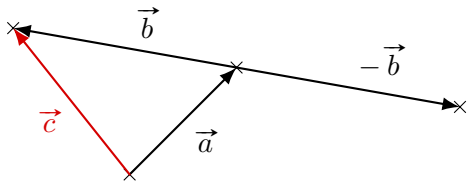
Der Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$ ist der Vektor, der gleich lang ist wie $\vec{a}$ und in die umgekehrte Richtung zeigt. Der Gegenvektor wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.



1.7 Subtraktion

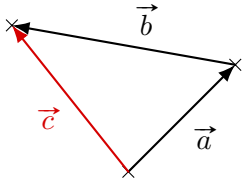
Die Subtraktion von Vektoren kann auf zwei Arten definiert werden. Erstens kann die Subtraktion eines Vektors $\vec{b}$ vom Vektor $\vec{a}$ als Addition des Gegenvektors $-\vec{b}$ betrachtet werden:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$



Zweitens kann die Subtraktionsgleichung durch addieren von $\vec{b}$ zu einer Addition umgeformt werden:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$$

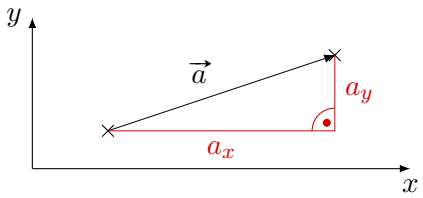


2 Komponentendarstellung

2.1 Komponenten

Wird ein Vektor $\vec{a}$ in das kartesische Koordinatensystem eingezeichnet, so kann der Vektor beschrieben werden durch die Distanzen a_x und a_y, welche er in Richtung der beiden Koordinatenachsen zurücklegt.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$



Dabei werden a_x und a_y die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ genannt. a_x ist die horizontale Komponente, a_y die vertikale Komponente. Die horizontale Komponente steht oben, die vertikale Komponente unten.

2.2 Addition und Subtraktion

Die Addition und Subtraktion von Vektoren erfolgt komponentenweise.

Addition. Zwei Vektoren $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_x \\ a_y \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ werden addiert, indem ihre Komponenten addiert werden:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_a + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Subtraktion. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden subtrahiert, indem ihre Komponenten subtrahiert werden:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_a - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

2.3 Skalierung

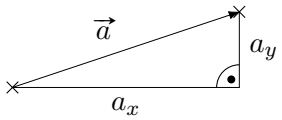
Die Skalierung eines Vektors erfolgt komponentenweise.

Skalierung. Ein Vektor $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_x \\ a_y \end{smallmatrix}\right)$ wird skaliert, indem seine Komponenten mit dem Faktor multipliziert werden:

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$$

2.4 Länge

Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet. Die Komponenten bilden zusammen mit dem Vektor ein rechtwinkliges Dreieck. Deshalb kann die Länge mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aus dem Komponenten berechnet werden.



Länge eines Vektors. Die Länge $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_x \\ a_y \end{smallmatrix}\right)$ wird wie folgt berechnet:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Beispiel. *Der Vektor* $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ *hat die Länge* $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5.831$.

2.5 Nullvektor

Ein spezieller Vektor ist der Nullvektor. Er stellt einen Pfeil der Länge Null dar. Im Gegensatz zu allen anderen Vektoren hat der Nullvektor keine Richtung. Der Nullvektor wird als Zahl Null mit einem Vektorpfeil geschrieben: $\vec{0}$. Alle seine Komponenten sind Null.

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6 Gleichheit

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_x = b_x \quad \text{und} \quad a_y = b_y$$

3 Vektoren und Punkte

3.1 Unterschiede

Vektoren und Punkte sind unterschiedliche Objekte mit unterschiedlichen Eigenschaften.

Ein **Punkt** befindet sich an einem bestimmten Ort und er hat keine Richtung. Ein Punkt P mit den **Koordinaten** x und y wird wie folgt geschrieben:

$$P(x/y)$$

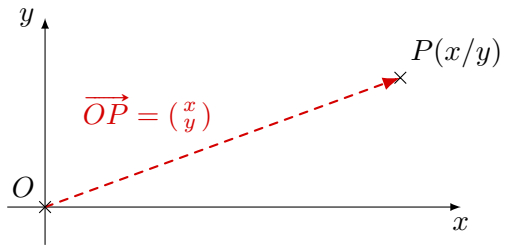
Ein **Vektor** kann beliebig verschoben werden, er hat also keine feste Position, aber er zeigt in eine bestimmte Richtung. Ein Vektor $\vec{a}$ mit den **Komponenten** x und y wird folgendermassen geschrieben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.2 Ortsvektor

Wird ein Vektor $\overrightarrow{OP}$ mit dem Ursprung O als Anfangspunkt und dem Punkt $P(x/y)$ als Endpunkt definiert wird, so entsprechen die Komponenten des Vektors gerade den Koordinaten des Punkts P.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Dieser Vektor wird **Ortsvektor** des Punkts P genannt. Der Ortsvektor von P zeigt vom Ursprung O zum Punkt P.

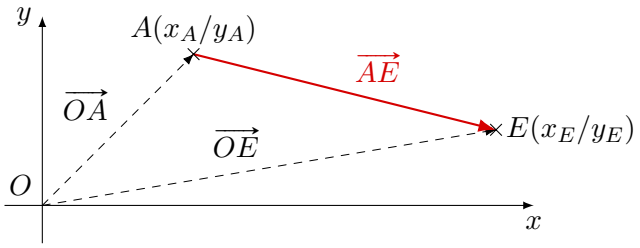
Werden Vektoren als Verschiebungen aufgefasst, so verschiebt der Ortsvektor den Ursprung O in den Punkt P.

Beispiel. *Der Ortsvektor des Punkts* $A(-3/5)$ *lautet* $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.3 Vektor zwischen Punkten

Ein Vektor kann durch einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt E bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Der Vektor $\overrightarrow{AE}$, welcher von Punkt A nach Punkt E zeigt, kann als Subtraktion der Ortsvektoren von A und E ausgedrückt werden. Daraus lässt sich schliessen, dass sich die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AE}$ durch Subtraktion der Koordinaten von Punkt E und Punkt A ergeben.

Vektor zwischen Punkten. Ein Vektor mit Anfangspunkt AE und Endpunkt E errechnet sich, indem der Ortsvektor von E vom Ortsvektor von A subtrahiert wird;

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}$$

Beispiel. *Der Vektor $\vec{a}$ mit dem Anfangspunkt $A(2/3)$ und den Endpunkt $E(9/1)$ hat die folgende Komponentendarstellung:*

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.4 Mittelpunkt einer Strecke

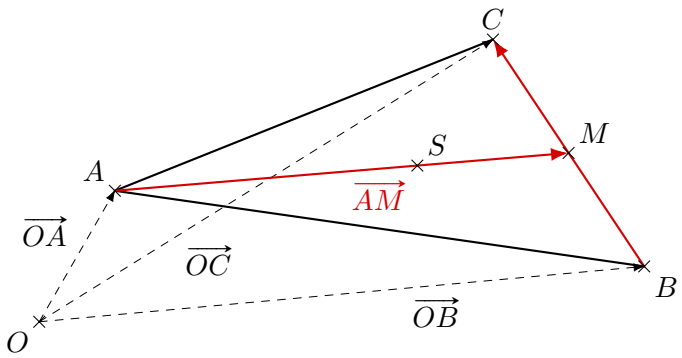
Um den Ortsvektor des Mittelpunkts M einer Strecke $\overline{AB}$ zu bestimmen, wird der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Strecke halbiert und zum Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ des Anfangspunkts addiert:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

Mittelpunkt einer Strecke. Der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ wird berechnet, indem die Ortsvektoren der Endpunkte addiert und halbiert werden.

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

3.5 Schwerpunkt eines Dreiecks



Der Schwerpunkt S eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1, also:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM}$$

Um den Vektor $\overrightarrow{AM}$ zu bestimmen, wird der Ortsvektor des Mittelpunkts M benötigt:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

Nun kann der Vektor $\overrightarrow{AM}$ bestimmt werden:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \overrightarrow{OA}$$

Jetzt kann $\overrightarrow{AM}$ in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt werden. Diese wird anschliessend vereinfacht.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OC} - \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

Schwerpunkt eines Dreiecks. Der Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ errechnet sich wie folgt:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

Beispiel. *Der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ soll bestimmt werden:*

$A(2/2) \qquad B(9/1) \qquad C(7/3)$

Der Ortsvektor des Schwerpunkts wird berechnet:

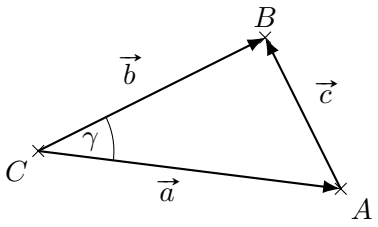
$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}18\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$$

Der Schwerpunkt lautet $S(6/2)$.

4 Winkel zwischen Vektoren

4.1 Herleitung aus dem Kosinussatz

Im folgenden wird gezeigt, wie das Skalarprodukt aus dem Kosinussatz hergeleitet wird. Dazu wird das folgende Dreieck betrachtet:



Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden als Komponenten geschrieben. Der Vektor $\vec{c}$ kann aus den anderen berechnet werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix}$$

Nun werden die Längen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet, welche den Seitenlängen des Dreiecks entsprechen. Um unnötige Wurzeln zu vermeiden, werden die Längen quadriert.

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 \qquad |\vec{b}|^2 = b_x^2 + b_y^2$$

Analog kann die Länge der Seite c aus den Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} & |\vec{c}|^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 && \text{ausmultiplizieren} \\ \iff \quad & |\vec{c}|^2 = b_x^2 - 2a_xb_x + a_x^2 + b_y^2 - 2a_yb_y + a_y^2 && \text{Terme umstellen} \\ \iff \quad & |\vec{c}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2a_xb_x - 2a_yb_y && \text{ersetzen} \\ \iff \quad & |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2a_xb_x - 2a_yb_y && -2 \text{ ausklammern} \\ \iff \quad & |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\left(a_xb_x + a_yb_y\right) && \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen entsteht eine Gleichung, welche grosse Ähnlichkeit mit dem Kosinussatz hat:

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

Daraus kann geschlossen werden, dass folgendes gilt:

$$a_xb_x + a_yb_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann ausschliesslich aus den Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet werden. Sie wird das Skalarprodukt der beiden Vektoren genannt.

Skalarprodukt. Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist eine Zahl, welche wie folgt berechnet wird:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Beispiel. *Das Skalarprodukt der beiden Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *beträgt:*

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 = -2 - 15 = -17$$

Aus dem Vergleich mit dem Kosinussatz ergibt sich folgende Beziehung zwischen dem Skalarprodukt und dem Winkel der Vektoren:

Skalarprodukt und Winkel: Für das Skalarprodukt und den von den Vektoren eingeschlossenen Winkel φ gilt folgende Beziehung:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

4.2 Winkel zwischen zwei Vektoren

Wird die obenstehende Gleichung umgeformt, so kann damit der Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet werden.

Winkel zwischen zwei Vektoren: Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird wie folgt berechnet:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Beispiel. *Der Winkel zwischen den Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *soll berechnet werden.*

Zunächst wird das Skalarprodukt sowie die Längen der beiden Vektoren berechnet:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 = -2 - 15 = -17$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

Nun kann der Winkel berechnet werden:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-17}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}}\right) \approx \arccos(-0.925) \approx 157.620°$$

4.3 Rechter Winkel

Wenn das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich Null ist, dann ist der Kosinus des Winkels ebenfalls gleich Null. Das bedeutet, dass in diesem Fall der Winkel 90° beträgt und die Vektoren somit in einem rechten Winkel zueinander stehen.

Rechter Winkel. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden genau dann einen rechten Winkel, wenn

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

Beispiel. *Der Winkel zwischen den Vektoren* $\vec{c} = \binom{5}{1}$ *und* $\vec{d} = \binom{-1}{5}$ *soll bestimmt werden.*

Zunächst wird das Skalarprodukt der beiden Vektoren berechnet:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \binom{5}{1} \circ \binom{-1}{5} = 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = -5 + 5 = 0$$

Da das Skalarprodukt Null ist, beträgt der Winkel 90°*.*

4.4 Parallelität

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel, wenn Sie in die gleiche oder umgekehrte Richtung zeigen. Das ist genau dann der Fall, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.

Parallelität. Zwei Vektoren $\vec{a} = \binom{a_x}{a_y}$ und $\vec{b} = \binom{b_x}{b_y}$ sind parallel, wenn es eine Zahl t gibt, sodass

$$\vec{a} = t \cdot \vec{b} \qquad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \qquad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = t$$

Die Parallelität wird überprüft, indem die Quotienten der x-Komponenten und y-Komponenten der beiden Vektoren gebildet wird. Sind die Verhältnisse gleich, so sind die Vektoren kollinear.

Beispiel. *Die Vektoren* $\vec{a} = \binom{2}{-1}$ *und* $\vec{b} = \binom{-6}{3}$ *sind parallel, da:*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{2}{-6} = \boxed{\frac{-1}{3}} \qquad = \qquad \frac{a_y}{b_y} = \frac{-1}{3} = \boxed{\frac{-1}{3}}$$

Die Vektoren $\vec{a} = \binom{2}{-1}$ *und* $\vec{c} = \binom{2}{2}$ *sind nicht parallel, da*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \qquad \neq \qquad \frac{a_y}{b_y} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

5 Anwendungen

Mit Vektoren können geometrische Probleme algebraisch gelöst werden. Hier werden exemplarisch einige solche Probleme betrachtet.

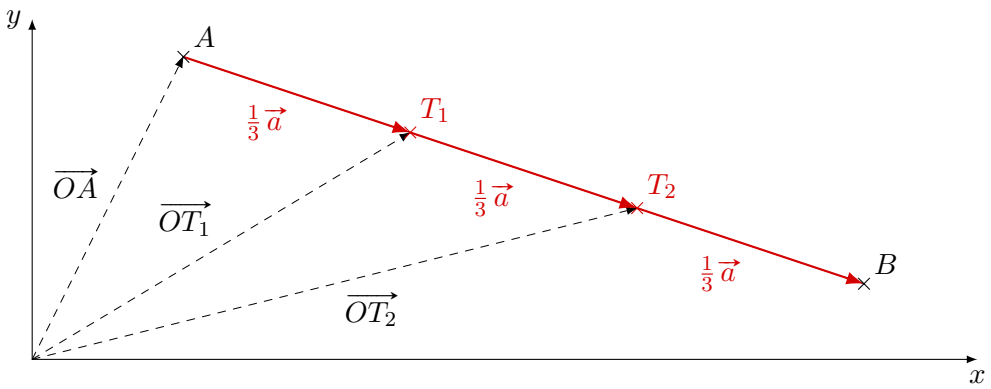
5.1 Streckenteilung

Aufgabe: Teilen Sie die Strecke $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile.

$A(2/4)$ $B(11/1)$

Zunächst wird der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bestimmt. Der erste Teilpunkt T_1 erhält man, indem ein Drittel von $\vec{a}$ zum Ortsvektor von A addiert wird. Der zweite Teilpunkt erhält man durch Addieren von zwei Dritteln von $\vec{a}$.

$\vec{a} := \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\vec{a}$ $\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\vec{a}$



Damit ergeben sich folgende Ortsvektoren und Koordinaten für T_1 und T_2:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11-2\\1-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OT_1} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\frac{1}{3}9\\4+\frac{1}{3}(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OT_2} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\frac{2}{3}9\\4+\frac{2}{3}(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$$

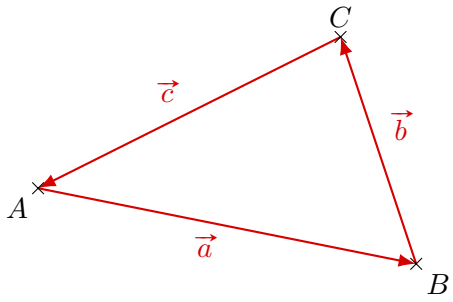
Die Strecke wird also durch die Punkte $T_1(5/3)$ und $T_2(8/2)$ in drei gleiche Teile geteilt.

5.2 Umfang eines Dreiecks

Aufgabe: Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ mit

$A(3/2)$ $B(8/1)$ $C(7/4)$

Zwischen den Punkten A, B und C können die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$ definiert werden.



Anschliessend werden die Längen der Vektoren ermittelt und addiert, um den Umfang des Dreiecks zu erhalten.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \approx 5.099$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7-8 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3.162$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 3-7 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \approx 4.472$$

Damit ergibt sich für den Umfang des Dreiecks:

$$U = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \approx 5.099 + 3.162 + 4.472 \approx 12.733$$

5.3 Parallelogramm

Aufgabe: Ermitteln Sie den fehlenden Eckpunkt C und den Umfang des Parallelogramms $ABCD$ mit

$$A(3/2) \qquad B(8/1) \qquad D(6/4)$$

Zuerst werden die Seitenvektoren des Parallelogramms bestimmt:

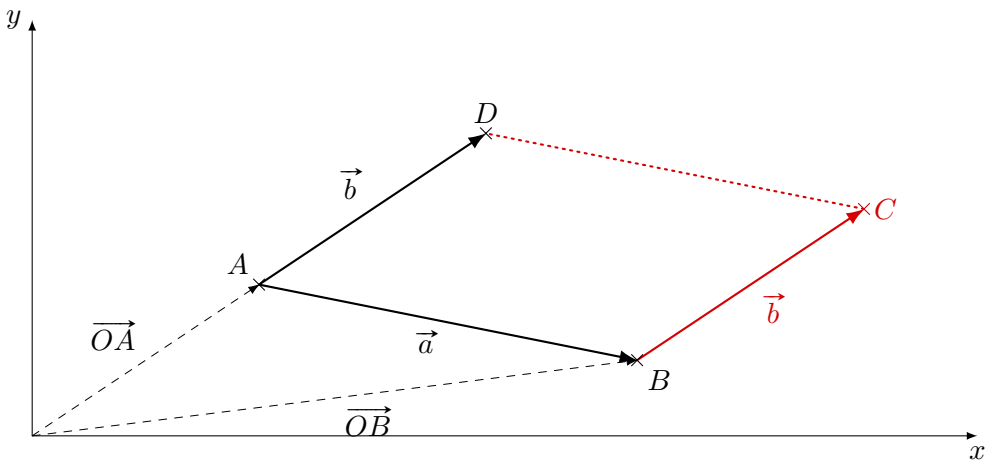
$$\vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt C erhält man, indem der Punkt B um den Vektor $\vec{b}$ verschiebt. Dazu wird $\vec{b}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$ addiert:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Also ist der vierte Punkt des Parallelogramms $C(11/3)$.



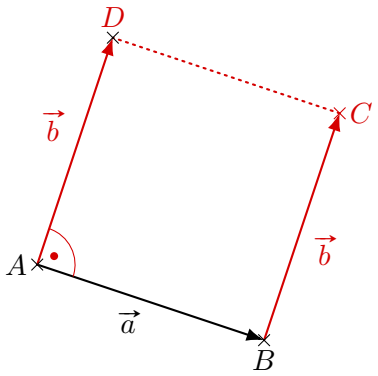
Der Umfang des Parallelogramms ergibt sich, indem die Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert und verdoppelt werden:

$$U = 2\left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right) = 2\left(\sqrt{5^2 + (-1)^2} + \sqrt{3^2 + 2^2}\right) \approx 2 \cdot 8.704 \approx 12.310$$

5.4 Quadrat

Aufgabe: Ermitteln Sie die fehlenden Eckpunkte C und D sowie die Fläche des Quadrats $ABCD$ mit

$A(3/2) \qquad B(6/1)$



Zunächst wird der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ermittelt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun wird der zu $\vec{a}$ senkrechte Vektor $\vec{b}$ ermittelt:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nun werden C und D ermittelt:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{b} = \binom{6}{1} + \binom{1}{3} = \binom{6+1}{1+3} = \binom{7}{4}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{b} = \binom{3}{2} + \binom{1}{3} = \binom{3+1}{2+3} = \binom{4}{5}$$

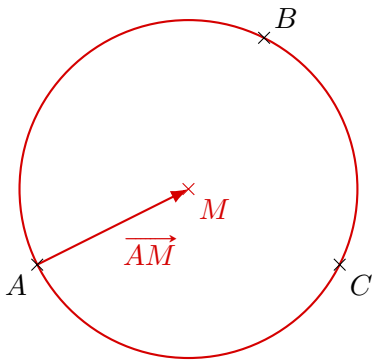
Die gesuchten Punkte sind also $C(7/4)$ und $D(4/5)$. Die Fläche des Quadrats beträgt

$$A = |\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{3^2 + 1^2}\right)^2 = 9 + 1 = 10$$

5.5 Kreis

Aufgabe: Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises, auf welchem die folgenden drei Punkte liegen:

$A(3/2)$ $B(6/5)$ $C(7/2)$



Sei $\overrightarrow{OA}$ der Ortsvektor des Punkts A auf dem Kreis und $\overrightarrow{OM}$ der Ortsvektor des Mittelpunkts M mit den folgenden Komponenten:

$$\overrightarrow{OA} = \binom{3}{2} \qquad \overrightarrow{OM} = \binom{x}{y}$$

Der Vektor $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ zeigt vom Punkt P zum Kreismittelpunkt M. Seine Länge ist der Radius des Kreises r:

$$\left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right| = r$$

In Komponentenschreibweise ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = r$$

Um die Wurzel zu eliminieren wird die Gleichung quadriert.

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = r^2$$

Für die Punkte B und C ergeben sich zwei analoge Gleichungen. Diese ergeben zusammen ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2 \quad (1)$$
$$(x-6)^2+(y-5)^2=r^2 \quad (2)$$
$$(x-7)^2+(y-2)^2=r^2 \quad (3)$$

Die Gleichungen werden ausmultipliziert:

$$x^2-6x+y^2-4y+13=r^2 \quad (1)$$
$$x^2-12x+y^2-10y+61=r^2 \quad (2)$$
$$x^2-14x+y^2-4y+53=r^2 \quad (3)$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen werden r und die Quadrate eliminiert und es entsteht ein lineares Gleichungssystem:

$$-6x-4y+13=-12x-10y+61 \quad (1)=(2)$$
$$-6x-4y+13=-14x-4y+53 \quad (1)=(3)$$

Nach Zusammenfassen ergibt sich:

$$\begin{aligned} 6x+6y&=48 \\ 8x&=40 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist $x=5$ und $y=3$. Also hat der Mittelpunkt des Kreises die Koordinaten $M(5/3)$.

Den Radius des Kreises ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{AM}$:

$$r=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\binom{5-2}{3-2}\right|=\left|\binom{3}{1}\right|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}\approx 3.162$$