Algebra 2

Wurzeln, Potenzen und Logarithmen

Stefan Rothe

19.05.2026

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Wurzel **2**
2 Allgemeine Potenz **3**
3 Logarithmus **6**
4 Exponentielles Wachstum **9**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Allgemeine Wurzel

1.1 Motivation

Das radizieren oder ziehen der Quadratwurzel liefert die Antwort auf die Frage, welche Zahl quadriert werden muss, um eine bestimmte Zahl zu erhalten.

Geometrisch gesehen wird mit dem ziehen der Quadratwurzel die Seitenlänge eines Quadrats mit gegebenem Flächeninhalt bestimmt.

Analog kann aber auch gefragt werden, welche Seitenlänge ein Würfel mit gegebenem Volumen hat. Oder algebraisch ausgedrückt: Welche Zahl muss mit drei potenziert werden, um beispielsweise 27 zu erhalten?

$$\square^3 = 27$$

Um diese Frage zu beantworten, wird der Wurzelbegriff erweitert.

Definition: Das Wurzelziehen oder Radizieren ist die Umkehroperation des Potenzierens. Mit dem Radizieren wird die unbekannte, nicht-negative Basis der Potenz berechnet:

$$x^k = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt[k]{a} \qquad (x \geq 0)$$

1.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl a welche radiziert wird, heisst **Radikand**, die Zahl k heisst **Wurzelexponent**. Das Resultat des Wurzelziehens heisst k-te **Wurzel** oder k-tes **Radikal**.

Für das Wurzelziehen wird das Operationszeichen $\sqrt[k]{}$ verwendet. Der Wurzelexponen wird oben links hingeschrieben Wir schreiben

$$\sqrt[k]{a} = b$$

und sagen «Die k-te Wurzel von a ist gleich b.»

Beispiel. *Die dritte Wurzel von* 125 *ist* 5*:* $\sqrt[3]{125} = 5$

2 Allgemeine Potenz

2.1 Natürlicher Exponent

Das Potenzieren ist eine Rechenoperation der dritten Stufe. Die Potenz zweier natürlicher Zahlen entsteht durch das wiederholte Multiplizieren des gleichen Faktors a mit dem Ausgangswert Eins:

Potenz. Die n-te Potenz der rellen Zahl a ergibt sich, indem die Zahl n-ma mit Eins multipliziert wird.

$$a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}}$$

2.2 Negativer Exponent

Bisher konnten Potenzen nur eine natürliche Zahl als Exponenten haben. Man kann sich aber fragen, was es bedeuten würde, wenn eine negative Zahl im Exponenten steht. Dazu wird betrachtet, was passiert, wenn bei einer Potenz immer wieder der Exponent um Eins verringert wird.

$$\begin{array}{lll} & 5^3 = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 & \mid : 5 \\ \iff & 5^2 = 1 \cdot 5 \cdot 5 = 25 & \mid : 5 \\ \iff & 5^1 = 1 \cdot 5 = 5 & \mid : 5 \\ \iff & 5^0 = 1 & \end{array}$$

Wenn bei einer Potenz der Exponent um eins verringert wird, bedeutet dies, dass der Wert der Potenz durch ihre Basis dividiert wird. Das macht Sinn, ein um Eins kleinerer Exponent bedeutet ja, dass die Basis einmal weniger mit sich selbst multipliziert wird.

Wenn nun diese Regel bei der Potenz 5^0 weiter angewendet wird, dann entsteht die Potenz 5^{-1}. Deren Wert ist der Wert von 5^0 dividert durch 5 also $\frac{1}{5}$. Wird dies so fortgesetzt, können die Werte für sämtliche Potenzen mit negativem Exponenten bestimmt werden:

$$\begin{array}{lll} & 5^0 = 1 & \mid : 5 \\ \iff & 5^{-1} = \frac{1}{5} & \mid : 5 \\ \iff & 5^{-2} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \dfrac{1}{25} & \mid : 5 \\ \iff & 5^{-3} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{125} & \end{array}$$

Diese Überlegungen werden in folgender Definition festgehalten:

Potenz mit negativem Exponenten: Die Potenz einer Zahl a mit einem negativen Exponenten $-n$ ist der Kehrwert der Potenz mit der Gegenzahl n im Exponenten.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Beispiel. $4^{-7} = \frac{1}{4^7}$ $3^{-1} = \frac{1}{3}$ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$

2.3 Gebrochen rationaler Exponent

Genau so kann gefragt werden, was passiert, wenn die Wurzel einer Potenz gezogen wird:

$$\begin{array}{lll|l} & 5^9 & = \left(5^3\right)^3 & \sqrt[3]{} \\ \iff & 5^3 & = 5^3 & \sqrt[3]{} \\ \iff & 5^1 & = 5^0 & \end{array}$$

Wenn bei einer Potenz der Exponent um eins verringert wird, bedeutet dies, dass der Wert der Potenz durch ihre Basis dividiert wird. Das macht Sinn, ein um Eins kleinerer Exponent bedeutet ja, dass die Basis einmal weniger mit sich selbst multipliziert wird.

Wenn nun diese Regel bei der Potenz 5^0 weiter angewendet wird, dann entsteht die Potenz 5^{-1}. Deren Wert ist der Wert von 5^0 dividert durch 5 also $\frac{1}{5}$. Wird dies so fortgesetzt, können die Werte für sämtliche Potenzen mit negativem Exponenten bestimmt werden:

$$\begin{array}{lll|l} & 5^1 & = 5 & \sqrt[3]{} \\ \iff & 5^{\frac{1}{3}} & = \sqrt[3]{5} & \sqrt[3]{} \\ \iff & 5^{\frac{1}{9}} & = \sqrt[9]{5} & \end{array}$$

Diese Überlegungen werden in folgender Definition festgehalten:

Potenz mit rationalem Exponenten: Die Potenz einer Zahl a mit einem rationalen Exponenten $\frac{m}{n}$ ist die n-te Wurzel der Potenz a^m.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Beispiel. $4^{-7} = \frac{1}{4^7}$ $3^{-1} = \frac{1}{3}$ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$

2.4 Allgemeine Definition

Zusammenfassend kann die Potenz allgemein wie folgt definiert werden:

Definition Potenz. Die Potenz wird je nach Art des Exponenten wie folgt definiert:

natürliche Zahl	negative ganze Zahl	rationale Zahl
$a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

2.5 Potenzgesetze

Die bekannten Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit rationalen Exponenten.

Gleiche Basis. Potenzen mit gleicher Basis werden wie folgt multipliziert bzw. dividiert:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Beispiel. $\sqrt{a} \cdot a^2 = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^2 = a^{\frac{1}{2}+2} = a^{\frac{5}{2}}$ $\qquad \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{1-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Gleicher Exponent. In einem Produkt oder einem Quotienten können gleiche Exponenten ausgeklammert werden:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Beispiel. $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = (xy)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{xy}$

Potenz einer Potenz. Potenzen werden potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

3 Logarithmus

3.1 Asymmetrie der Potenz

Kommutativität

Die Addition und Multiplikation sind kommutative Operationen. Das heisst, dass die Operanden vertauscht werden können, ohne das sich der Wert des Terms ändert:

$$3 + 4 = 4 + 3 = 7 \qquad 2 \cdot 9 = 9 \cdot 2 = 18$$

Die Potenz hingegen ist nicht kommutativ:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 3^2 = 3 \cdot 3$$

Umkehroperationen

Umkehroperationen kommen zustande, wenn ein Operand nicht bekannt ist. So ist die Subtraktion eingeführt worden, um die folgende Frage zu beantworten:

«Welche Zahl muss zu Fünf addiert werden, um Acht zu erhalten?»

$$5 + \square = 8 \qquad \square + 5 = 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 8 - 5 = \square$$

Da die Addition kommutativ ist, kann für beide Operanden die Frage gleich beantwortet werden.

Da das Potenzieren nicht kommutativ ist, werden hier zwei Umkehroperationen.

Suche nach der Basis

Zunächst wird nach einer unbekannten Basis gesucht. Die folgende Frage soll beantwortet werden:

«Welche Zahl muss zur vierten Potenz erhoben werden, um 81 zu erhalten?»

$$\square^4 = 81$$

Diese Frage wird mit der allgemeinen Wurzel beantwortet:

$$\square = \sqrt[4]{81}$$

Wie wir gesehen haben kann die Wurzel aber auch als Potenz dargestellt werden

$$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}$$

Damit kann auch gesagt werden, dass die eine Umkehroperation des Potenzierens das Potenzieren mit dem Kehrwert ist:

$$\left(\sqrt[4]{81}\right)^4 = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 81^{\frac{1}{4} \cdot 4} = 81^1 = 81$$

Suche nach dem Exponenten

Bei der Suche nach dem Exponenten ergibt sich aber eine andere Antwort:

«Um welche Zahl muss Drei potenziert werden, um 81 zu erhalten?»

$$3^{\square} = 81$$

Diese Frage wird mit dem Logarithmus beantwortet:

$$\square = \log_3(81)$$

3.2 Definition

Der Logarithmus x einer Zahl a zur Basis b ist diejenige Zahl, mit welcher die Basis b potenziert werden muss, um a zu erhalten.

$$\log_b(a) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad b^x = a \qquad\qquad \log_7(49) = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 7^2 = 49$$

3.3 Logarithmengesetze

Es gelten drei Logarithmengesetze. Sie entsprechen den Potenzgesetzen, welche sich auf Potenzen mit gleicher Basis beziehen.

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

$$\log_b\left(x^k\right) = k \cdot \log_b(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (b^x)^k = b^{x \cdot k}$$

3.4 Spezielle Logarithmen

Für folgende Basen werden manchmal besondere Schreibweisen verwendet. Dabei steht e für die Eulersche Zahl $2.7182818\ldots$

Bezeichnung	**Basis**	**Schreibweise**	**Bedeutung**
Zehnerlogarithmus	10	$\log(x)$ oder $\lg(x)$	$\log_{10}(x)$
Zweierlogarithmus	2	$\mathrm{lb}(x)$	$\log_2(x)$
natürlicher Logarithmus	e	$\ln(x)$	$\log_{\mathrm{e}}(x)$

3.5 Gleichungen Logarithmieren

Um eine Gleichung nach einer Variable x im Exponenten aufzulösen, kann die Gleichung logarithmiert werden. Dabei wird auf beide Seiten der Gleichung der Logarithmus zur gleichen Basis angewendet.

$$\begin{array}{rrl|l} & 1.2^x &= 9 & \log \\ \iff & \log\left(1.2^x\right) &= \log(9) & \text{Logarithmusgesetz} \\ \iff & x \cdot \log(1.2) &= \log(9) & : \log(1.2) \\ \iff & x &= \dfrac{\log(9)}{\log(1.2)} & \text{Taschenrechner} \\ \iff & x &\approx 12.05 & \end{array}$$

3.6 Basiswechsel Potenz

Wie kann eine Potenz mit der Basis a als Potenz mit der Basis b dargestellt werden?

$$a^c = b^{\square}$$

Um diese Frage zu beantworten, wird der gesuchte Exponent mit x bezeichnet und anschliessend diese Gleichung nach x aufgelöst.

$$\begin{array}{rrl|l} & a^c &= b^x & \log_b \\ \iff & \log_b\left(a^c\right) &= \log_b\left(b^x\right) & \text{Potenzregel} \\ \iff & c \cdot \log_b(a) &= x \cdot \log_b(b) & \log_b(b) = 1 \\ \iff & c \cdot \log_b(a) &= x & \end{array}$$

Daraus folgt die folgende Regel, um einen Basiswechsel vorzunehmen:

Basiswechsel Potenz. Um eine Potenz mit der Basis a in eine Potenz mit der Basis b umzuwandeln, muss der Exponent mit dem Logarithmus von a zur Basis a multipliziert werden:

$$a^c = b^{c \cdot \log_b(a)}$$

Spezialfall natürliche Potenz. Um eine Potenz mit der Basis a in eine natürliche Potenz umzuwandeln, muss der Exponent mit dem natürlichen Logarithmus von a multipliziert werden:

$$a^c = \mathrm{e}^{c \cdot \ln(a)}$$

3.7 Basiswechsel Logarithmus

Computer und Taschenrechner sind nur für die Berechnung von Logarithmen einer bestimmten Basis (normalerweise 10) programmiert. Um einen Logarithmus mit einer anderen Basis zu berechnen, muss mit folgender Regel ein Basiswechsel durchgeführt werden.

$$\log_b(a) = \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(b)}$$

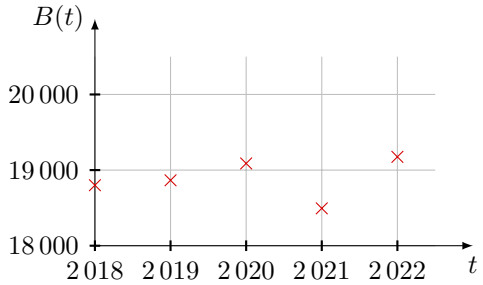
4 Exponentielles Wachstum

4.1 Wachstumsvorgänge

Viele Grössen, die wir messen, verändern sich mit der Zeit. In diesem Kapitel wird betrachtet, wie solche Vorgänge mathematisch beschrieben werden können.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl gymnasialer Abschlüsse in der Schweiz in verschiedenen Jahren. Diese Anzahl wird der **Bestand** $B(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t genannt.

t	$B(t)$	d	p
2018	18'800		
2019	18'865	65	0.35 %
2020	19'088	223	1.18 %
2021	18'494	−594	−3.11 %
2022	19'175	681	3.68 %



Gymnasiale Abschlüsse in der Schweiz

Die Zuordnung Zeitpunkt $t \to$ Bestand $B(t)$ ist mathematisch betrachtet eine Abbildung oder eine Funktion, welche auch graphisch in einem Koordinatensystem dargestellt werden kann.

Die Änderung des Bestands von einem Zeitpunkt zum nächsten kann auf zwei Arten beschrieben werden.

Die **absolute Veränderung** d ist die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Beständen.

$$d = B(t+1) - B(t)$$

Wenn die absolute Veränderung immer gleich ist, dann liegt ein **lineares Wachstum** vor.

Die **relative** oder **prozentuale Veränderung** p ist die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Beständen im Verhältnis zum ersten der beiden Bestände.

$$p = \frac{d}{B(t)} = \frac{B(t+1) - B(t)}{B(t)}$$

Wenn die relative Veränderung konstant ist, dann liegt ein **exponentielles Wachstum** vor.

Wenn die Veränderung negativ ist, spricht man von **Zerfall** oder von **negativem Wachstum**.

Wachstumsprozesse treten in vielen Bereichen auf, beispielsweise:

- Wachstum von Populationen (z.B. Bakterien, Tiere, Bevölkerung)
- Zerfall radioaktiver Materialien
- Verbreitung von Infektionskrankheiten
- Zunahme von Kapital beim Sparen mit Zinseszins
- Verbreitung von Memes in sozialen Netzwerken
- technologische Fortschritte (Moorsches Gesetz)
- Abkühlung von heissen Flüssigkeiten

4.2 Exponentielles Wachstum

Wenn die relative Veränderung p konstant ist, sprechen wir von **exponentiellem Wachstum**. Wenn der Anfangsbestand $B(0)$ und die Veränderung p bekannt sind, kann der Bestand $B(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t wie folgt berechnet werden:

$$B(t) = B(0) \cdot (1+p)^t$$

Beim exponentiellen Wachstum wird der **Wachstumsfaktor** q so definiert:

$$q = \frac{B(t+1)}{B(t)} = 1 + p$$

Damit kann die Formel vereinfacht geschrieben werden:

$$B(t) = B(0) \cdot q^t$$

Je nachdem, ob der Wachstumsfaktor grösser oder kleiner als Null ist, nimmt der Bestand zu oder ab:

	Wachstumsfaktor	relatives Wachstum
Zunahme	$q > 1$	$p > 0$
Abnahme	$0 < q < 1$	$-1 < p < 0$

Beispiel. *Ein typisches Beispiel für eine* ***exponentielle Zunahme*** *ist das Wachstum von Bakterien unter idealen Bedingungen. So ist eine Kolibakterienkultur zu Beginn eines Experiments* 5 cm^2 *gross. Jede Minute nimmt die Fläche um* 3.5 % *zu. Damit ist*

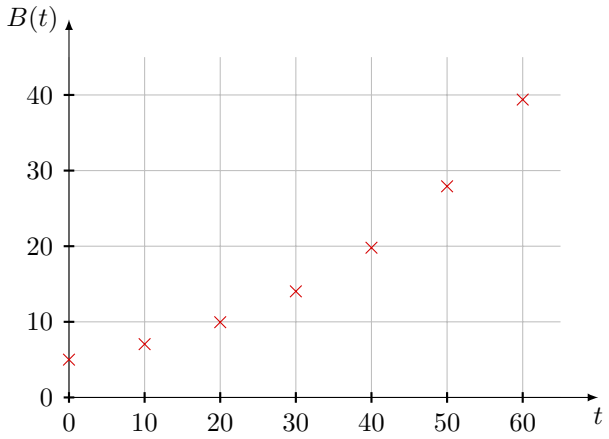
$$B(0) = 5 \qquad\qquad p = 0.035$$

Die Fläche der Bakterienkultur $B(t)$ *in Abhängigkeit der vergangenen Zeit* t *pro Minute kann mit der folgenden Formel beschrieben werden:*

$$B(t) = 5 \cdot (1 + 0.035)^t = 5 \cdot 1.035^t$$

Die Bakterienkultur hat einen Wachstumsfaktor von 1.035.

t	$B(t)$
0	5.00
1	5.18
2	5.36
10	7.05
20	9.95
30	14.03
40	19.80
50	27.92
60	39.39



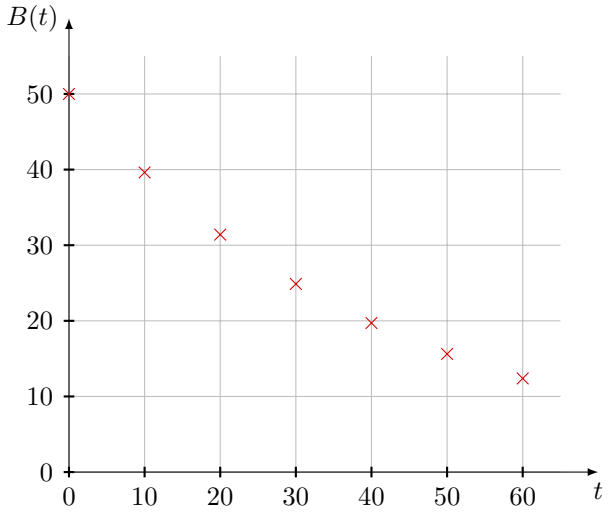
Beispiel. *Ein typisches Beispiel für eine* ***exponentielle Abnahme*** *ist der Zerfall eines radioaktiven Materials. Vom Kernspaltungsprodukt Cäsium-137 zerfallen pro Jahr* 2.3 % *der Atomkerne. Zu Beginn sind* 50 g *des Materials vorhanden. Somit ist*

$$B(0) = 50 \qquad\qquad p = -0.023$$

Die verbleibende Menge Cäsium-137 in Abhängigkeit der vergangenen Zeit t *pro Jahr wird mit der folgenden Formel beschrieben:*

$$B(t) = 50 \cdot (1 - 0.023)^t = 50 \cdot 0.977^t$$

t	$B(t)$
0	50.00
1	48.85
2	47.73
10	39.62
20	31.40
30	24.88
40	19.71
50	15.62
60	12.38



4.3 Verdopplungszeit / Halbwertszeit

Ein oft verwendetes Mass für das exponentielle Wachstum ist die Zeit, in welcher sich der Bestand verdoppelt beziehungsweise halbiert. Diese Zeit wird **Verdopplungszeit** oder **Halbwertszeit** genannt.

Um die Verdopplungszeit für eine gegebenen Wachstumsfaktor q zu bestimmen, wird in der Wachstumsformel $B(t) = 2 \cdot B(0)$ gesetzt und die Gleichung nach t aufgelöst.

$$\begin{array}{rrl|l} & 2 \cdot B(0) &= B(0) \cdot q^t & : B(0) \\ \iff & 2 &= q^t & \log \\ \iff & \log(2) &= \log\left(q^t\right) & \text{Logarithmusgesetze} \\ \iff & \log(2) &= t \cdot \log(q) & : \log(q) \\ \iff & \dfrac{\log(2)}{\log(q)} &= t & \end{array}$$

Der Anfangsbestand fällt aus der Gleichung, er beeinflusst die Verdopplungszeit nicht. Für den Wachstumsfaktor q ergibt sich die Verdopplungszeit

$$t = \frac{\log(2)}{\log(q)} = \frac{\log(2)}{\log(1+p)}$$

Für die Bestimmung der Halbwertszeit wird $\log(2)$ durch $\log(0.5) = -\log(2)$ ersetzt.

Beispiel. *Für die Kolibakterien mit einem Wachstumsfaktor von $q = 1.035$ pro Minute wird die Verdopplungszeit ermittelt:*

$$\begin{array}{rrl|l} & 2 &= 1.035^t & \log \\ \iff & \log(2) &= \log\left(1.035^t\right) & \textit{Logarithmusgesetz} \\ \iff & \log(2) &= t \cdot \log(1.035) & : \log(1.035) \\ \iff & \dfrac{\log(2)}{\log(1.035)} &= t & \\ \iff & 20.14 &\approx t & \end{array}$$

Sie haben eine Verdopplungszeit von etwa 20 Minuten.

Um den Wachstumsfaktor zu bestimmen, wenn die Halbwertszeit bekannt ist, wird $B(t) = 0.5B(0)$ in die Formel eingesetzt und nach q aufgelöst.

$$\begin{array}{rrl|l} & 0.5 \cdot B(0) &= B(0) \cdot q^t & : B(0) \\ \iff & 0.5 &= q^t & \sqrt[t]{\ } \\ \iff & \sqrt[t]{0.5} &= q & \end{array}$$

Für die Halbwertszeit t ergibt sich also der Wachstumsfaktor

$$q = \sqrt[t]{0.5} \qquad\qquad p = \sqrt[t]{0.5} - 1$$

Für die Bestimmung des Wachstumsfaktors aus der Verdopplungszeit wird $\sqrt[t]{0.5}$ durch $\sqrt[t]{2}$ ersetzt.

Beispiel. *Iod hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen.*

$$q = \sqrt[8]{0.5} \approx 0.917 \qquad\qquad p = 0.917 - 1 = -0.083$$

Also hat Iod einen Wachstumsfaktor von 0.917 pro Tag. Jeden Tag zerfallen 8.3 % *der Iodatome.*

4.4 Anfangsbestand bestimmen

Um bei einem exponentiellen Wachstum den Anfgangsbestand zu bestimmen, wir die Formel nach $B(0)$ aufgelöst. Die Division durch q^t kann gemäss Definition als negative Potenz geschrieben werden.

$$B(0) = \frac{B(t)}{q^t} = B(t) \cdot q^{-t} = B(t) \cdot (1+p)^{-t}$$

Beispiel. *Wie viel Franken muss man auf ein Sparkonto einzahlen, wenn es innert 20 Jahren durch Zinseszins auf 2000 Franken anwachsen soll? Der jährliche Zinssatz beträgt* 5 %*. Es ist*

$$t = 20 \qquad\qquad B(20) = 2000 \qquad\qquad p = 0.05$$

Die Werte werden in die Formel eingesetzt: $B(0) = 2000 \cdot (1 + 0.05)^{-20} \approx 753.78$

Es müssen also 753 Franken angelegt werden.

4.5 Wachstumsfaktor bestimmen

Sind bei einem exponentiellen Wachstum nur zwei Bestände $B(t_1)$ und $B(t_2)$ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 bekannt, so kann damit das relative Wachstum p bestimmt werden.

Dazu werden die beiden bekannten Bestände in die Formel für den Anfangsbestand aus dem vorherigen Abschnitt eingesetzt. Beide Mal muss sich der gleiche Anfangsbestand ergeben, also werden die Formeln gleichgesetzt. Diese Gleichung kann nach q aufgelöst werden:

$$\begin{array}{rrl|l} & \frac{B(t_1)}{q^{t_1}} & = \frac{B(t_2)}{q^{t_2}} & \cdot q^{t_2} : (B(t_1) \\ \iff & \frac{q^{t_2}}{q^{t_1}} & = \frac{B(t_2)}{B(t_1)} & \text{Potenzgesetz} \\ \iff & q^{t_2-t_1} & = \frac{B(t_2)}{B(t_1)} & \sqrt[t_2-t_1]{\ } \\ \iff & q & = \sqrt[t_2-t_1]{\frac{B(t_2)}{B(t_1)}} & \end{array}$$

Der Wachstumsfaktor kann also mit folgender Formel aus zwei Beständen ermittelt werden:

$$q = \sqrt[t_2-t_1]{\frac{B(t_2)}{B(t_1)}} \qquad p = \sqrt[t_2-t_1]{\frac{B(t_2)}{B(t_1)}} - 1$$

Beispiel. *Die Grösse einer Bakterienkultur wird gemessen. Nach einer Stunde beträgt sie* 30 cm^2*, nach zwei Stunden* 90 cm^2*. Es ist*

$$t_1 = 60 \qquad B(t_1) = 30 \qquad t_2 = 120 \qquad B(t_2) = 90$$

Die Werte werden in die Formel eingesetzt:

$$q = \sqrt[120-60]{\frac{90}{30}} = \sqrt[60]{3} \approx 1.0185$$

Der Wachstumsfaktor q beträgt 1.0185, das relative Wachstum p ist 1.85 % *pro Minute.*

4.6 Zeitdauer bestimmen

Wenn bei einem exponentiellen Wachstum ein Zielbestand $B(t)$ vorgegeben ist, kann die benötigte Zeit t ermittelt werden. Dazu wird die Gleichung für exponentielles Wachstum durch Logarithmieren nach t aufgelöst.

$$\begin{array}{rrl|l} & B(t) & = B(0) \cdot q^t & : B(0) \\ \iff & \frac{B(t)}{B(0)} & = q^t & \log \\ \iff & \log\left(\frac{B(t)}{B(0)}\right) & = \log\left(q^t\right) & \text{Logarithmengesetze} \\ \iff & \log(B(t)) - \log(B(0)) & = t \cdot \log(q) & : \log(q) \\ \iff & \frac{\log(B(t)) - \log(B(0))}{\log(q)} & = t & \end{array}$$

Die benötigte Zeit t, um einen bestimmten Bestand $B(t)$ zu erreichen, kann also mit folgender Formel berechnet werden:

$$t = \frac{\log(B(t)) - \log(B(0))}{\log(q)}$$

Beispiel. *Ein Kapital von 1000 Franken soll verdoppelt werden. Es wird mit einem Zinssatz von* 4.5 % *angelegt. Es gilt:*

$$B(0) = 1000 \qquad B(t) = 2000 \qquad p = 0.045$$

Die Werte werden in die Formel eingesetzt:

$$t = \frac{\log(2000) - \log(1000)}{\log(1 + 0.045)} \approx 15.75$$

Es dauert 16 Jahre, bis sich das Kapital verdoppelt hat.