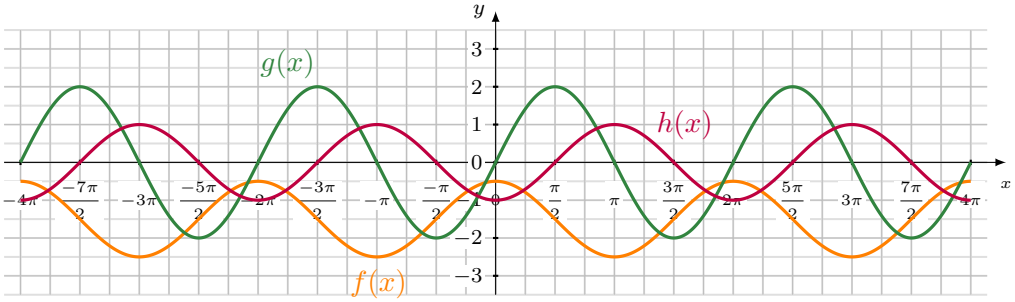
Repetition Winkelfunktionen

Beachten Sie:

- Sie haben 60 Minuten Zeit.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Sie dürfen den Taschenrechner und das Fundamentum verwenden.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Total	Note
max. Punkte	9	10	9	4	4	36	
Punkte							

1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen zu den folgenden Graphen: **(9P)**



(a) $f(x) =$ (3P)

Lösung:

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1.5 = \cos(x) - 1.5$$

(b) $g(x) =$ (3P)

Lösung:

$$g(x) = 2 \cdot \sin(x)$$

(c) $h(x) =$ (3P)

Lösung:

$$h(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + \pi)$$

2. Steckbrief. **(10P)**

Gegeben ist die Funktion f mit folgender Funktionsgleichung:

$$f(x) = 2 \cdot \sin(x) - 2$$

In den folgenden Teilaufgaben erhalten Sie je einen Punkt für die richtige Antwort und einen Punkt für die korrekte mathematische Notation.

(a) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f an. (2P)

Lösung:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

(b) Geben Sie die Bildmenge der Funktion f an. (2P)

Lösung:

$$\mathbb{B} = [0, 4]$$

(c) Geben Sie die Periodenlänge der Funktion f an. (2P)

Lösung:

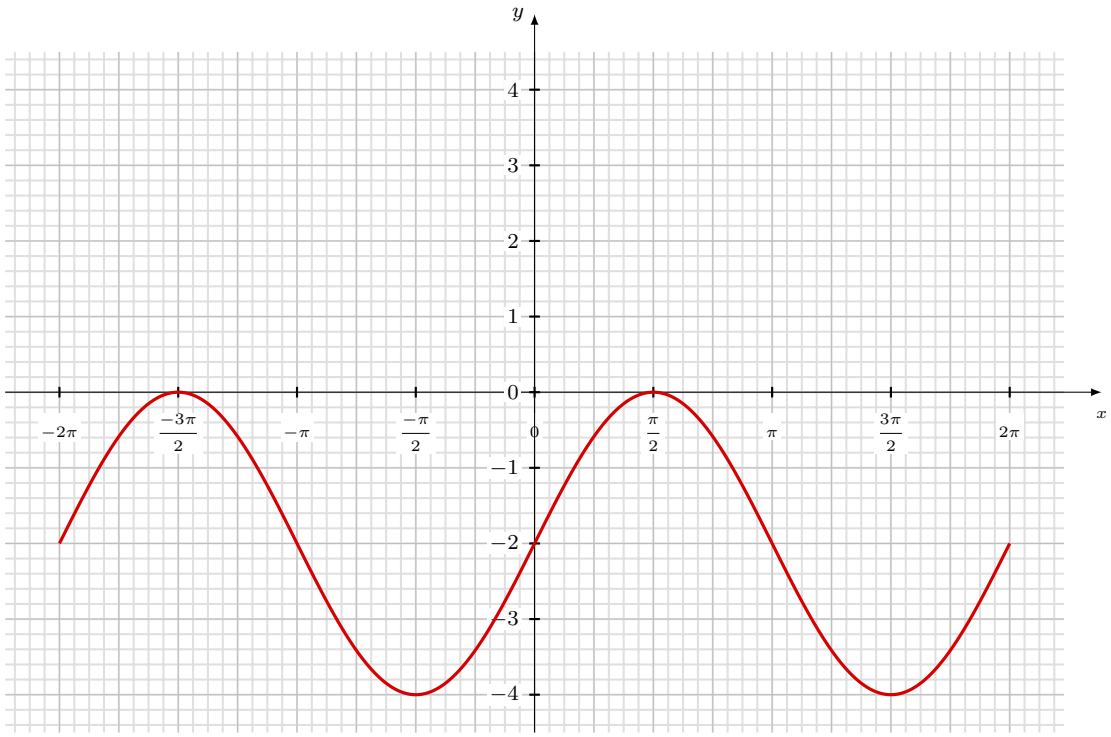
$$p = 2\pi$$

(d) Geben Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f an. (2P)

Lösung:

$$f\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = 0 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

(e) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich von -2π bis 2π. (2P)



3. Temperatur Boston. **(9P)**

Der Verlauf der Temperatur in Boston während eines Jahres lässt sich näherungsweise durch eine allgemeine Sinusfunktion beschreiben. Die tiefste Temperatur wird im Januar erreicht und beträgt –3 °C, die höchste Temperatur beträgt 23 °C und wird im Juli erreicht.

(a) Bestimmen Sie Amplitude und Periode der Funktion, wenn sie die Temperatur in Abhängigkeit vom Monat beschreiben soll. (3P)

Lösung: Die Amplitude entspricht dem maximalen Ausschlag ausgehend vom Mittelwert oder der halben maximalen Schwankung.

$$a = \frac{23 - (-3)}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

Die Amplitude beträgt $\boxed{13\,°\text{C}}$.

Die Periode ist die Zeitdauer für eine komplette Schwingung, also die Zeitdauer, bis sich der Zyklus wiederholt. In dieser Situation sind dies $\boxed{12 \text{ Monate}}$.

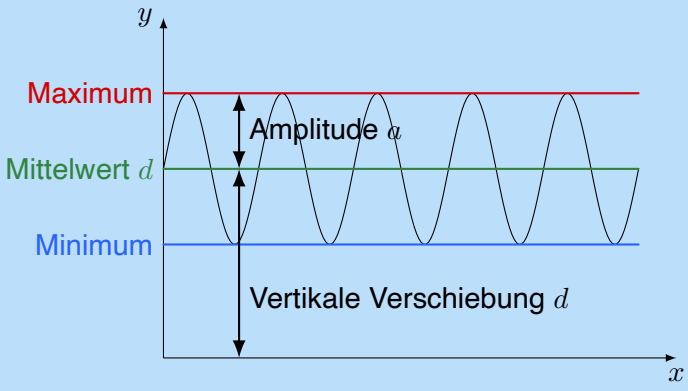
(b) Stellen Sie eine allgemeine Sinusfunktion $T(t)$ auf, welche die Temperatur in Abhängigkeit des Monats modelliert. (4P)

Lösung: Die Form der allgemeinen Sinusfunktion (harmonische Schwingung) lautet

$$F(t) = a \cdot \sin((b \cdot t + c) + d$$

Dabei ist a die Amplitude, b die Frequenz, c die horizontale Verschiebung und d die vertikale Verschiebung.

Wenn das Minimum und das Maximum einer Sinusfunktion bekannt sind, können daraus der Mittelwert d und die Amplitude a berechnet werden:



$$d = \frac{\text{min} + \text{max}}{2} \qquad a = \text{max} - d$$

Für diese Aufgabe ist also die mittlere Temperatur und somit die vertikale Verschiebung:

$$d = \frac{23 + (-3)}{2} = \frac{20}{2} = 10\,°\text{C}$$

Die Amplitude $a = 13$ ist schon aus der vorherigen Teilaufgabe. Sie kann auch so berechnet werden:

$$a = 23 - 10 = 13\,°\text{C}$$

Die Frequenz b und die Periode p hängen wie folgt zusammen:

$$b = \frac{2\pi}{p} \qquad p = \frac{2\pi}{b}$$

Die Frequenz wird also wie folgt aus der Periode von 12 Monaten berechnet:

$$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

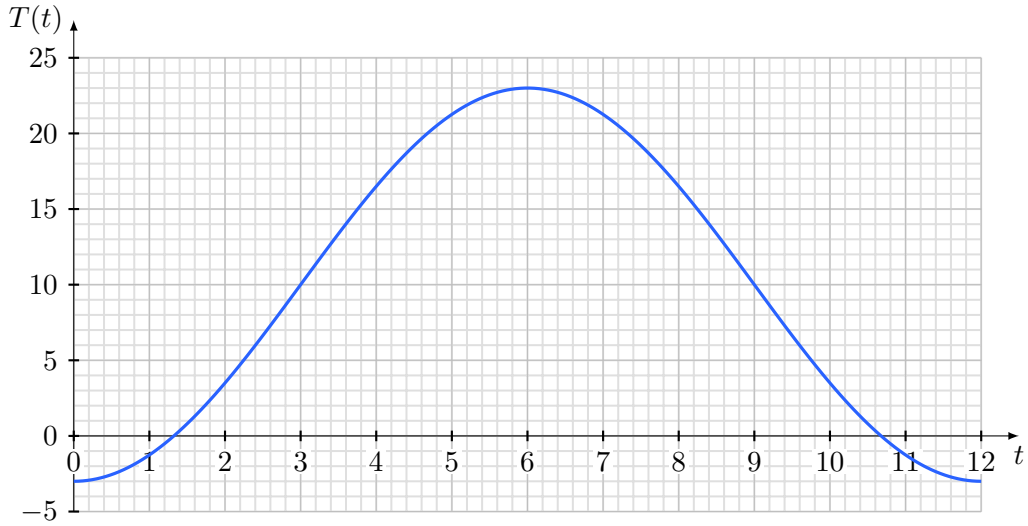
Ohne horizontale Verschiebung erreicht die Sinusfunktion den kleinsten Wert bei 1.5π, also nach $\frac{3}{4}$ der Periode. Da aber der Januar der kälteste Monat ist, muss das Minimum bei $t = 0$ liegen. Die Funktion muss also um $\frac{3\pi}{2}$ nach rechts geschoben werden. Bei der horizontalen Verschiebung muss das Vorzeichen vertauscht werden, also ist

$$c = \tfrac{3\pi}{2}$$

Damit ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$$F(t) = 13 \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{6} \cdot x + \tfrac{3\pi}{2}\right) + 10$$

(c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion in das Koordinatensystem ein. (2P)



4. Quiz. **(4P)**

(a) Was passiert mit dem Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x + c)$, wenn der Parameter c vergrössert wird? (1P)

- ◯ Er wird nach oben verschoben.
- ◯ Er wird nach unten verschoben.
- √ **Er wird nach links verschoben.**
- ◯ Er wird nach rechts verschoben.

(b) Was passiert mit dem Graphen der Funktion $f(x) = a \cdot \sin(x)$, wenn der Parameter a vergrössert wird? (1P)

◯ Er wird nach oben verschoben.

◯ Er wird nach unten verschoben.

√ **Er wird vertikal gestreckt.**

◯ Er wird vertikal gestaucht.

(c) Bei einer Funktion f gilt für sämtliche Funktionswerte $f(x) = -f(-x)$. Was bedeutet dies für den Funktionsgraphen? (1P)

◯ Er ist spiegelsymmetrisch bezüglich der x-Achse.

◯ Er ist spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse.

◯ Er ist spiegelsymmetrisch bezüglich der ersten Winkelhalbierenden.

√ **Er ist punktsymmetrisch bezüglich der Ursprungs.**

◯ Er ist punktsymmetrisch bezüglich der Nullstelle.

(d) Was trifft auf die Tangensfunktion $\tan(x)$ zu? (1P)

◯ Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$.

√ **Die Wertemenge ist $\mathbb{R}$.**

◯ Sie hat keine Nullstelle.

◯ Der Graph ist spiegelsymmetrisch.

5. Winkelmass. Berechnen Sie... **(4P)**

(a) 90° in Radiant. (2P)

Lösung:

$$90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \approx 1.571\,\text{rad}$$

Angabe Faktor $\frac{\pi}{180}$ **1P**, korrekte Lösung **1P**

(b) 2 rad in Grad. (2P)

Lösung:

$$2 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{360}{\pi} \approx 114.591°$$

Angabe Faktor $\frac{180}{\pi}$ **1P**, korrekte Lösung **1P**