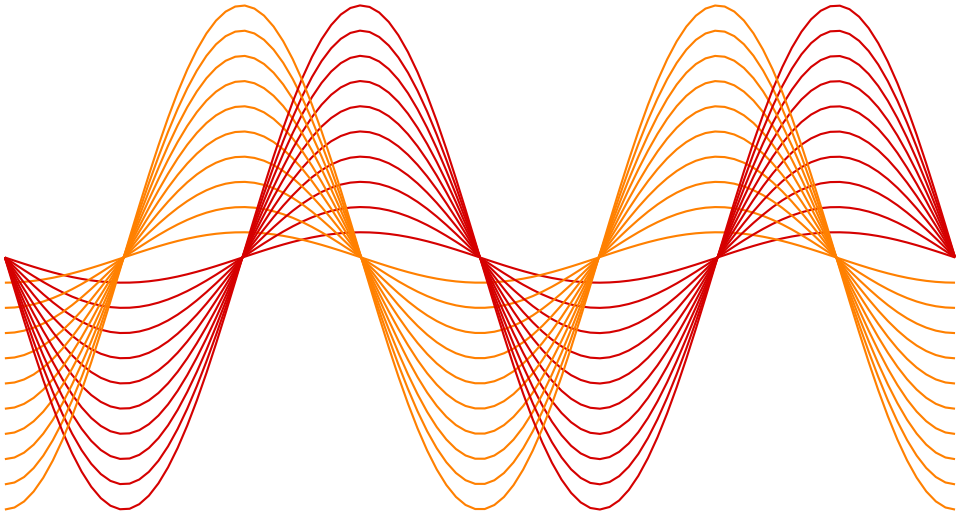
Winkelfunktionen

Stefan Rothe

14.11.2026



Inhaltsverzeichnis

1 Bogenmass / Radiant **2**
2 Winkelfunktionen **3**
3 Harmonische Schwingung **6**

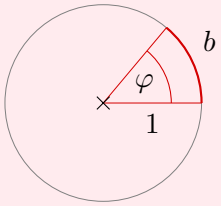
1 Bogenmass / Radiant

1.1 Winkelmessung

Bisher haben wir Winkel in Grad gemessen. Der Vollwinkel beträgt dabei 360°. Die Einteilung des Vollwinkels in 360 Teile ist aber willkürlich.

Grundlage für die Messung von Winkeln im Bogenmass bildet die Berechnung der Bogenlänge eines Kreissektors. Diese ist proportional zum Winkel. Beim Einheitskreis beträgt der Umfang des ganzen Kreises 2π. Diese Länge wird neu als Mass für den Vollwinkel genommen. Die anderen Winkel erhalten proportional ein entsprechendes Mass. So ist der halbe Winkel π, der rechte Winkel ist $\frac{\pi}{2}$.

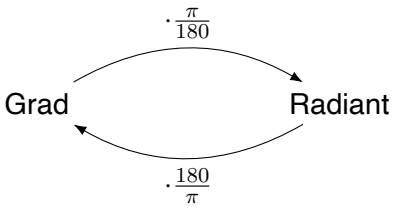
Bogenmass / Radiant Das Bogenmass eines Winkels φ ist die Länge b des Bogens über dem Winkel auf dem Einheitskreis.



Wird ein Winkel im Bogenmass angegeben, so wird die Einheit **Radiant** verwendet.

1.2 Umrechnung

Um einen Winkel von Grad nach Radiant umzurechnen, wird der Winkel durch 180 geteilt und mit π multipliziert. Um einen Winkel von Radiant nach Grad umzurechnen, wird der Winkel mit 180 multipliziert und durch π geteilt:



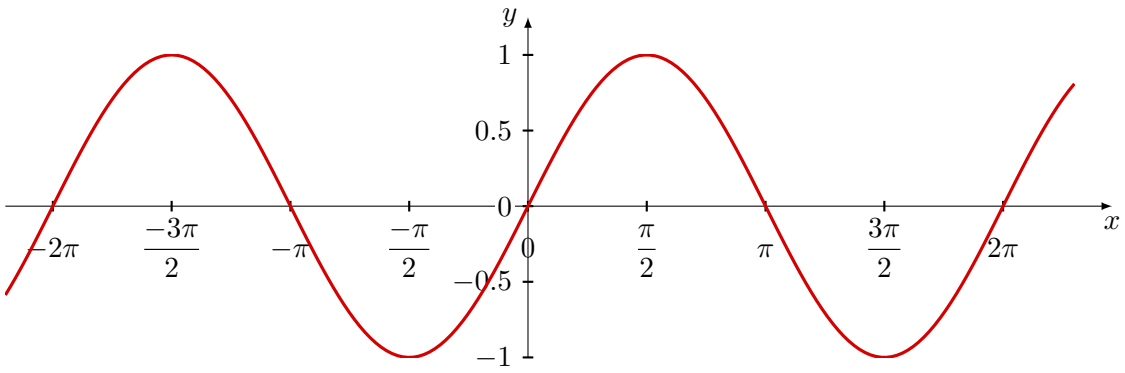
TI-30X MathPrint: Winkelmass einstellen

- Radiant als Winkelmass einstellen: mode, **RADIAN** wählen, enter drücken, clear drücken.
- Grad als Winkelmass einstellen: mode, **DEGREE** wählen, enter drücken, clear drücken.

2 Winkelfunktionen

2.1 Sinusfunktion

Die Sinusfunktion ist die Funktion, welche den Sinus $\sin(x)$ in Abhängigkeit des Winkels x berechnet. Dabei wird x in Radians gemessen. Der Definitionsbereich der Sinusfunktion ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der Wertebereich ist das Intervall $[-1, 1]$.



Die Sinusfunktion ist eine **periodische Funktion**. Das bedeutet, dass sich die Funktionswerte in regelmässigen Abständen wiederholen. Der kleinste Abstand, in dem sich die Werte wiederholen, heisst **Periode** der Funktion. Die Sinusfunktion hat die Periode 2π.

Die Periode der Sinusfunktion kann wie folgt als Gleichung ausgedrückt werden:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

Die Sinusfunktion ist eine **ungerade Funktion**. Das bedeutet, dass der Funktionsgraph punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist. Diese Eigenschaft kann wie folgt als Gleichung ausgedrückt werden:

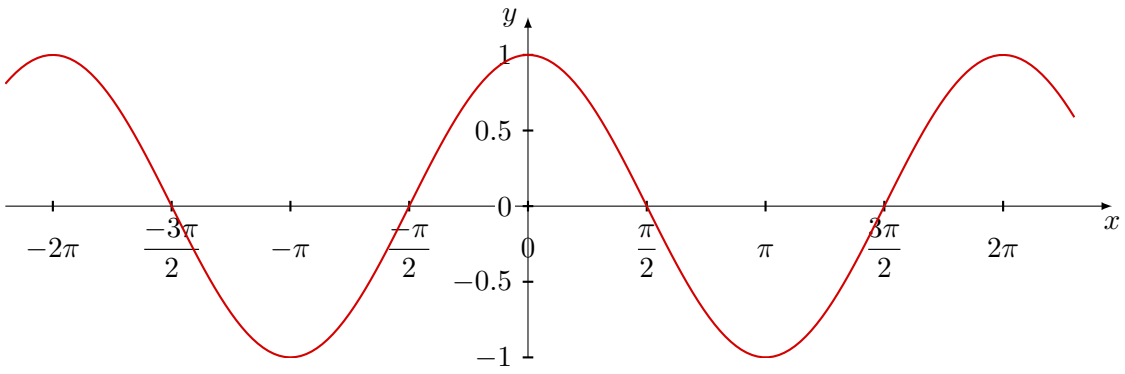
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Einige wichtige Funktionswerte der Sinusfunktion sind:

x in Radiant	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad
x in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

2.2 Kosinusfunktion

Die Kosinusfunktion ist die Funktion, welche den Kosinus $\cos(x)$ in Abhängigkeit des Winkels x berechnet. Dabei wird x in Radians gemessen. Der Definitionsbereich der Kosinusfunktion ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der Wertebereich ist das Intervall $[-1, 1]$.



Die Kosinusfunktion ist eine **periodische Funktion**. Das bedeutet, dass sich die Funktionswerte in regelmässigen Abständen wiederholen. Der kleinste Abstand, in dem sich die Werte wiederholen, heisst **Periode** der Funktion. Die Kosinusfunktion hat die Periode 2π.

Die Periode der Kosinusfunktion kann wie folgt als Gleichung ausgedrückt werden:

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$$

Die Kosinusfunktion ist eine **gerade Funktion**. Das bedeutet, dass der Funktionsgraph spiegelsymmetrsisch bezüglich der y-Achse ist. Diese Eigenschaft kann wie folgt als Gleichung ausgedrückt werden:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Einige wichtige Funktionswerte der Kosinusfunktion sind:

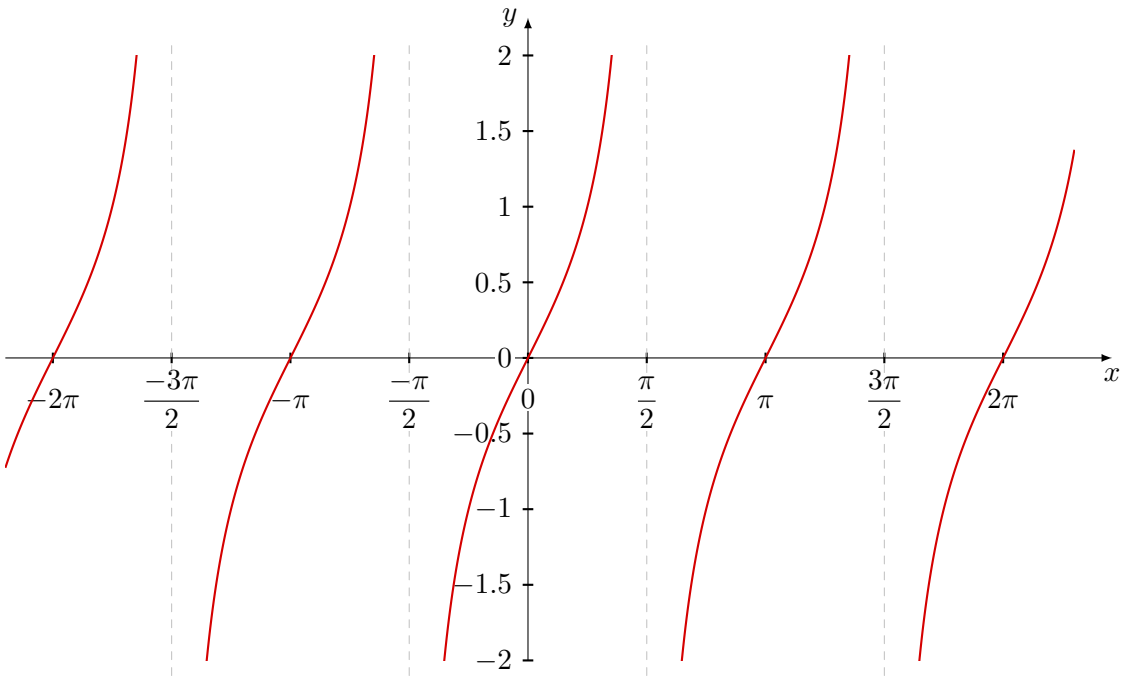
x in Radiant	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad
x in Grad	0°	30°	45°	60°	90°
$\tan(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2.3 Tangensfunktion

Die Tangensfunktion ist die Funktion, welche den Tangens $\tan(x)$ in Abhängigkeit des Winkels x berechnet. Dabei wird x in Radians gemessen. Die Tangensfunktion dort nicht definiert, wo der Kosinus des Winkels gleich Null wird. Also lautet der Definitionsbereich der Tangensfunktion:

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Das der Tangens jeden möglichen Wert annehmen kann, ist der Wertebereich der Tangensfunktion die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.



Die Tangensfunktion ist eine periodische Funktion mit der Periode π.

Die Tangensfunktion ist eine **ungerade Funktion**. Der Funktionsgraph ist also punktsymmetrisch bezüglich dem Ursprung. Dies wird mit der folgenden Funktionsgleichung ausgedrückt:

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Einige wichtige Funktionswerte der Tangensfunktion sind:

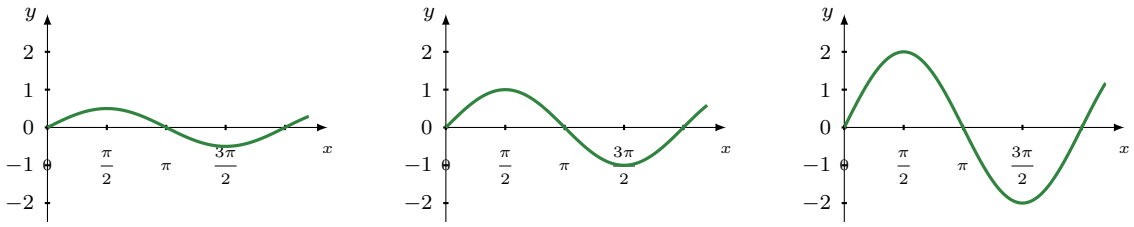
x in Radiant	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad
x in Grad	0°	30°	45°	60°	90°
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.def.

3 Harmonische Schwingung

In der Natur gibt es viele Vorgänge, welche auf kreisförmige Bewegungen zurückzuführen sind. Solche Bewegungen entsprechen gleichförmigen Bewegung eines Punktes auf einem Kreis. Das bedeutet, dass der Winkel α sich gleichmässig mit der Zeit ändert.

3.1 Amplitude

Die Amplitude a einer Schwingung ist die maximale Auslenkung in eine Richtung. Die folgenden Diagramme zeigen Sinusfunktionen mit einer Amplitude von $\frac{1}{2}$, 1 und 2.



$\frac{1}{2} \cdot \sin(x)$ $\sin(x)$ $2 \cdot \sin(x)$

In der Funktionsgleichung ist die Amplitude der Faktor a, mit welchem die ursprüngliche Sinusfunktion multipliziert wird:

$$f(t) = a \cdot \sin(t)$$

Bei Schallwellen hängt die Lautstärke von der Amplitude ab: je grösser die Amplitude, desto lauter erscheint der Ton.

Die Amplitude wird bestimmt, indem die Differenz der maximalen Auslenkungen halbiert wird.

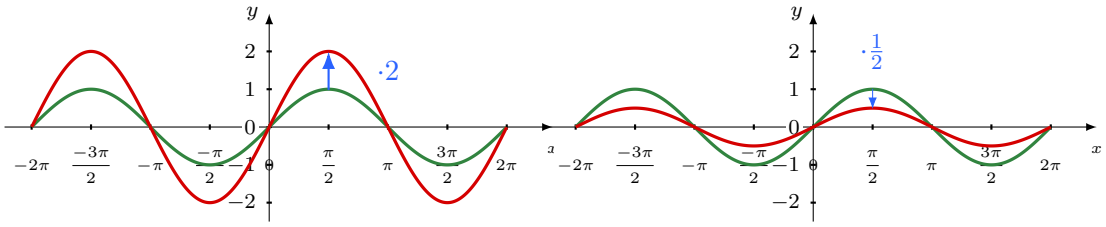
Beispiel. *Die mittlere Tagestemperatur in Helsinki schwankt zwischen* –4.9 °C *im Februar und* 18.3 °C *im Juli.*

Die Amplitude der Temperaturschwankung beträgt $\frac{1}{2}(18.3 - (-4.9)) = \frac{1}{2} \cdot 23.2 = 11.6\,^{\circ}\mathrm{C}$

3.2 Auswirkungen der Parameter

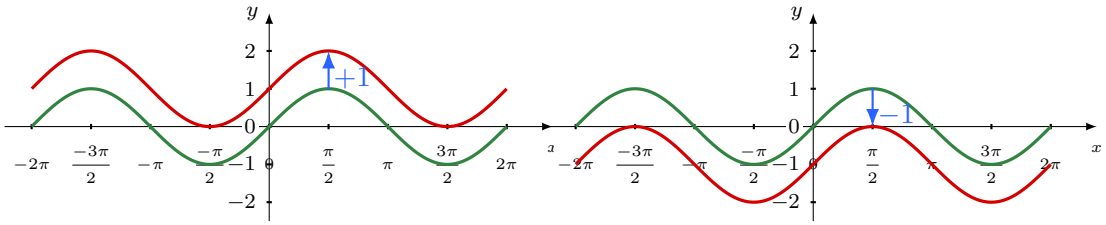
Die allgemeine Sinusfunktion lautet: $f(x) = a \cdot \sin(\omega x + c) + d$

Streckung in y-Richtung Mit dem Faktor a wird die Funktion in y-Richtung gestreckt:



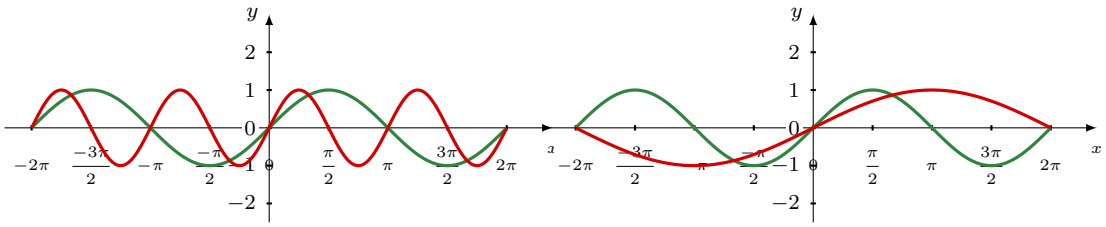
$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = 2 \cdot \sin(x)$ $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x)$

Verschiebung in y-Richtung Mit dem Faktor d wird die Funktion in y-Richtung verschoben:



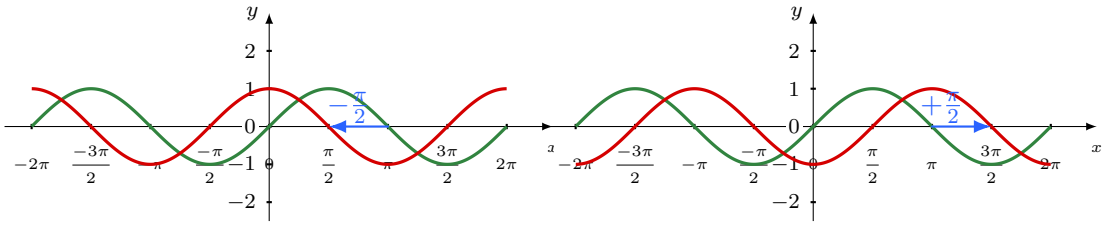
$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin(x) + 1$ $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin(x) - 1$

Streckung in x-Richtung Mit dem Faktor ω wird die Funktion in x-Richtung gestreckt.



$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin(2x)$ $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Verschiebung in x-Richtung Mit dem Faktor c wird die Funktion in x-Richtung verschoben.



$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$