Übungsprobe Basale Kompetenzen 2

- Die Probe dauert 90 Minuten.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Runden Sie auf vier Dezimalstellen.
- Geben Sie die Lösungswege an.
- Sie dürfen den Taschenrechner und das Fundamentum verwenden.
- Ansonsten sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- lineare Skala: **0P** Note 1, ab **40P** Note 6

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total	Note
max. Punkte	7	6	5	5	3	3	7	3	5	44	
Punkte											

1. Terme **(7P)**

(a) Vereinfachen Sie den folgenden Term: $\dfrac{4x^2 - 16y^2}{x + 2y}$ (2P)

Lösung:

$$= \frac{4\left(x^2 - 4y^2\right)}{x + 2y} = \frac{4(x - 2y)(x + 2y)}{x + 2y} = \boxed{4(x - 2y)}$$

Bewertung:

- Zähler vollständig faktorisieren **1P**
- Kürzen **1P**

(b) Vereinfachen Sie gemäss den Potenzgesetzen so viel wie möglich. (3P)

$$\sqrt[3]{\frac{(ax^2)^4\, x^{-2}}{8a^2\,(x^3)^5}} =$$

Lösung:

$$= \sqrt[3]{\frac{a^4x^8x^{-2}}{8a^2x^{15}}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{x^9}} = \boxed{\frac{1}{2x^3}\sqrt[3]{a^2}} = \boxed{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2x^3}}$$

Bewertung:

- Bruch in Wurzel vollständig kürzen **1P**
- Wurzel auflösen (mit Restwurzel oder rationalem Exponenten) **1P**

(c) Lösen Sie die Gleichung nach x auf: $(4^x)^2 = 100$ (2P)

Lösung:

$$\begin{array}{rrl|l} & (4^x)^2 &= 100 & \\ \iff & 4^{2x} &= 100 & \log \\ \iff & 2x \cdot \log(4) &= \log(100) & \\ \iff & x &= \dfrac{\log(100)}{2 \cdot \log(4)} \approx \boxed{1.6610} & \end{array}$$

2. Quadratische Gleichungen. (6P)

(a) Lösen Sie die quadratische Gleichung $3x^2 + 1 = 5x$. (2P)

Lösung: In Normalform bringen:

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

Lösungsformel anwenden:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Die Lösungsmenge lautet $\boxed{\mathbb{L} = \left\{\frac{5-\sqrt{13}}{6}; \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right\} \approx \{0.2324; 1.4343\}}$

(b) Lösen Sie die quadratische Gleichung $2x^2 = 5x$ ohne Verwendung der Lösungsformel. (2P)

Lösung:

$$\begin{array}{rrl|l} & 2x^2 &= 5x & -5x \\ \iff & 2x^2 - 5x &= 0 & \text{ausklammern} \\ \iff & x(2x - 5) &= 0 & \end{array}$$

Gemässs dem Satz vom Nullprodukt sind die Lösungen $\boxed{\mathbb{L} = \{0; 2.5\}}$.

(c) Erklären Sie, was es geometrisch bedeutet, dass eine quadratische Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen haben kann. (2P)

Lösung: Lösung: Der Funktionsgraph der zugehörigen quadratischen Gleichung ist eine Parabel. Die Lösungen der Gleichung sind die Nullstellen der Funktion, sie entsprechen also den Schnittpunkten des Graphs mit der x-Achse. Ist die Parabel zu weit oben bzw. unten, gibt es nur noch einen oder gar keine Schnittpunkte mehr.

3. Linearität (5P)

(a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion f, deren Graph durch die Punkte $A(2/7)$ und $B(4/-3)$ verläuft, ohne den Graphen zu zeichnen. (2P)

Lösung: Allgemeine Form einer linearen Gleichung ist

$$f(x) = mx + b$$

Steigung:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-(-3)}{2-4} = \frac{10}{-2} = \boxed{-5}$$

y-Achsenabschnitt durch Einsetzen von B:

$$\begin{array}{rrl|l} & f(x) &= -5x + b & B(4/-3) \\ \iff & -3 &= -5 \cdot 4 + b & +20 \\ \iff & 17 &= b & \end{array}$$

Die Gleichung lautet:

$$\boxed{f(x) = -5x + 17}$$

(b) Berechnen Sie die Nullstelle von f. (1P)

Lösung: Nullstelle bedeutet $f(x) = 0$, also:

$$\begin{array}{rrl|l} & 0 &= -5x + 17 & +5x \\ \iff & 5x &= 17 & :5 \\ \iff & x &= \frac{17}{5} = 3.4 & \end{array}$$

Die Nullstelle liegt bei $\boxed{x = 3.4}$.

(c) Bestimmen Sie den Punkt, in welchem sich die Graphen der beiden folgenden Funktionen schneiden: $g(x) = 4x - 7$ und $h(x) = -3x + 1$ (2P)

Lösung: Bedingung ist $g(x) = h(x)$.

$$\begin{array}{rrl|l} & 4x - 7 &= -3x + 1 & +3x + 7 \\ \iff & 7x &= 8 & :7 \\ \iff & x &= \frac{8}{7} & \end{array}$$

Für die y-Koordinate wird $x = \frac{8}{7}$ eingesetzt:

$$g\left(\frac{7}{8}\right) = 4 \cdot \frac{8}{7} - 7 = \frac{32-49}{7} = -\frac{17}{7}$$

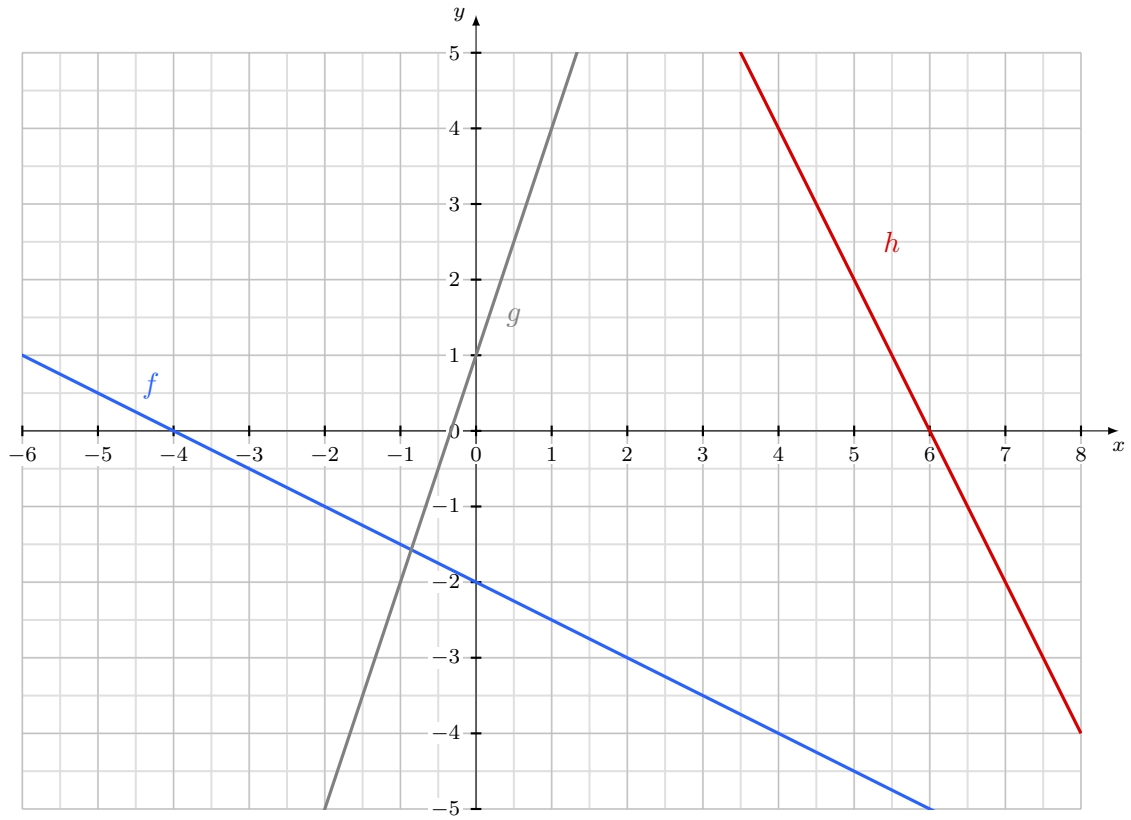
Der Schnittpunkt ist $\boxed{S\left(\frac{8}{7} \mid -\frac{17}{7}\right)}$.

4. Funktionen. Zeichnen Sie die Graphen der angegebenen Funktionen ins Koordinatensystem ein. Beschriften Sie die Graphen. **(5P)**

(a) $f(x) = -0.5x - 2$ (1P)

(b) $g(x) = 3x + 1$ (1P)

(c) $h(x) = -2x + 12$ (1P)



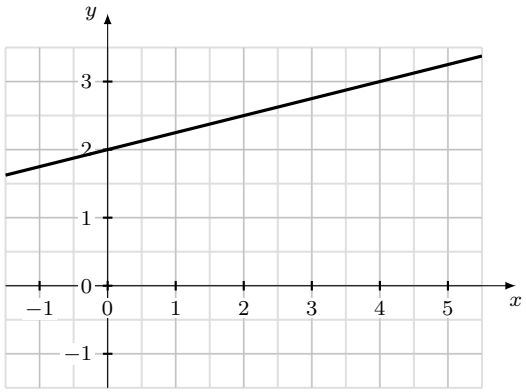
(d) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion, welche den abgebildeten Graphen hat. (2P)

Lösung: Ansatz: $f(x) = mx+q$. Die Steigung ist $m = 0.25$, der y-Achsenabschnitt ist $q = 2$. Also lautet die Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0.25x + 2 = \frac{1}{4}x + 2$$

Bewertung:

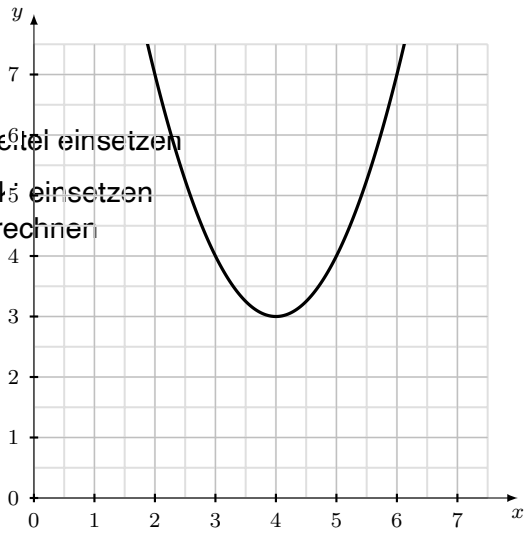
- Steigung korrekt **1P**
- y-Achsenabschnitt korrekt **1P**



5. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion, welche den abgebildeten Graphen hat. (3P)

Lösung: Scheitel $S(4/3)$, Punkt $P(2/7)$ Ansatz mit Scheitelpunktform:

	$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$	Scheitel einsetzen
$\iff$	$f(x) = a(x-4)^2 + 3$	Punkt einsetzen
$\iff$	$7 = a(2-4)^2 + 3$	ausrechnen
$\iff$	$7 = a \cdot 4 + 3$	-3
$\iff$	$4 = 4a$	$:4$
$\iff$	$1 = a$	



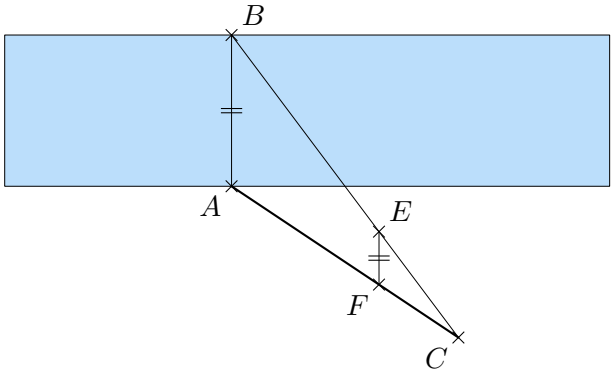
Die Gleichung lautet:

$$\boxed{f(x) = (x-4)^2 + 3}$$

Bewertung:

- Ansatz mit Scheitelpunktform ersichtlich **1P**
- Bestimmung von a nachvollziehbar**1P**
- Funktionsgleichung korrekt **1P**

6. Fluss. Die folgenden Längen sind bekannt: $\overline{CF} = 20\,\text{m}$, $\overline{FA} = 35\,\text{m}$ und $\overline{FE} = 12\,\text{m}$. Berechnen Sie die Breite $\overline{AB}$ des Flusses, die parallel zu $\overline{FE}$ liegt. (3P)



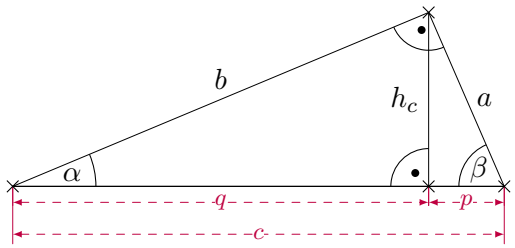
Lösung:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{AB} = \frac{\overline{FE} \cdot \overline{CA}}{\overline{CF}} = \frac{12 \cdot (20+35)}{20} = \boxed{33\,\text{m}}$$

Bewertung:

- Verhältnisgleichung korrekt **1P**
- Lösung inkl. Einheit korrekt **1P**

7. Das folgende rechtwinklige Dreieck ist gegeben. Bekannt ist $b = 15\,\text{cm}$ und $q = 9\,\text{cm}$. **(7P)**



(a) Berechnen Sie die Streckenlängen a, c, p und h_c. (4P)

Lösung: Die Höhe h_c kann aus b und q mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$h_c = \sqrt{b^2 - q^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \boxed{12\,\text{cm}}$$

Nun kann mit dem Höhensatz p berechnet werden:

$$p \cdot q = h_c^2 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{h_c^2}{q} = \frac{12^2}{9} = \boxed{16\,\text{cm}}$$

Jetzt kann c bestimmt werden:

$$c = p + q = 16 + 9 = \boxed{25\,\text{cm}}$$

Schliesslich kann a mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = \boxed{20\,\text{cm}}$$

(b) Geben Sie den Winkel α in Grad und im Bogenmass an. (2P)

Lösung:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{20}{25}\right) \approx 0.9273 = \boxed{53.1301^\circ}$$

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks. (1P)

Lösung:

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{20 \cdot 15}{2} = \boxed{150\,\text{cm}^2}$$

8. Ein Glas mit kochendem Wasser (100 °C) kühlt so ab, dass sich die Differenz zur Umgebungstemperatur (20 °C) alle 10 Minuten halbiert. **(3P)**

(a) Um welche Art von Wachstum oder Zerfall handelt es sich? (1P)

- ◯ lineares Wachstum
- ◯ linearer Zerfall
- ◯ exponentielles Wachstum
- √ **exponentieller Zerfall**
- ◯ logarithmisches Wachstum
- ◯ logarithmischer Zerfall

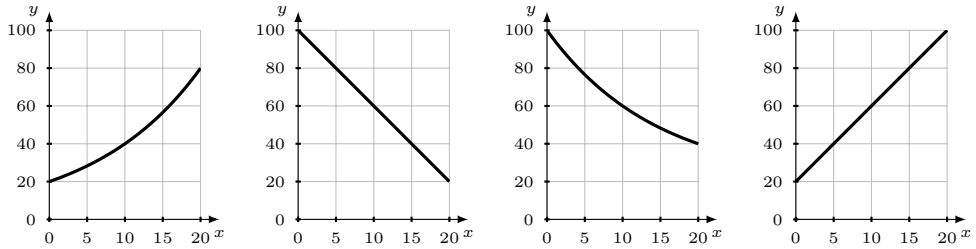
◯ Nullwachstum

(b) Nach welcher Zeit ist das Wasser im Glas auf 30 °C abgekühlt? (1P)

◯ nach 20 Minuten
◯ nach 25 Minuten
√ **nach 30 Minuten**
◯ nach 35 Minuten
◯ nach 40 Minuten
◯ nie

(c) Welcher der folgenden Funktionsgraphen stellt diesen Wachstumsvorgang dar? (1P)

Lösung

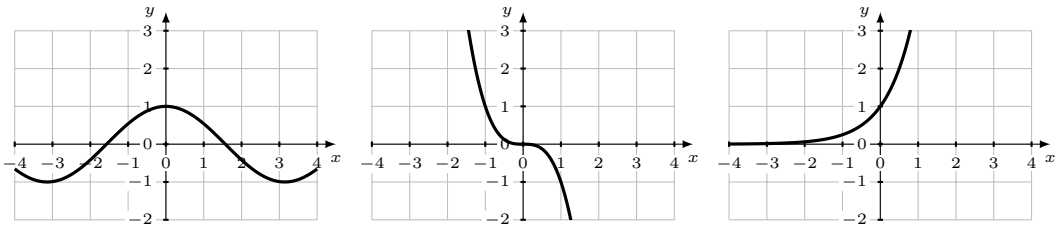


9. Welche Funktionsgleichung gehört zu welchem Graphen? Schreiben Sie die passenden Funktionsgleichungen in die Kästchen unter dem Graphen. (5P)

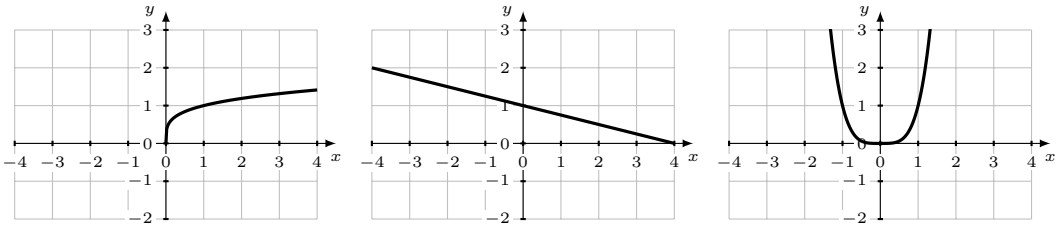
$f(x) = -x^3$ $f(x) = x^{-3}$ $f(x) = x^4$

$f(x) = \log_4(x)$ $f(x) = 4^x$ $f(x) = \sqrt[4]{x}$

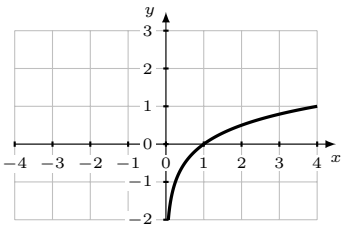
$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = -\frac{1}{4}x + 1$



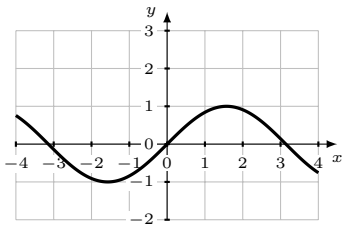
$f(x) = \cos(x)$ $f(x) = -x^3$ $f(x) = 4^x$



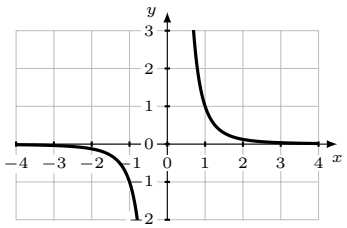
$f(x) = \sqrt[4]{x}$ $f(x) = -\frac{1}{4}x + 1$ $f(x) = x^4$



$f(x) = \log_4(x)$



$f(x) = \sin(x)$



$f(x) = x^{-3}$