Begriffe

1. **Folgenglieder berechnen.** Wie lauten die angegebenen Folgenglieder?

   (a) $a_k = 4k - 3$ Gesucht: a_5 und a_{100}

   Lösung:

   $$a_5 = 4 \cdot 5 - 3 = 17$$
   $$a_{100} = 4 \cdot 100 - 3 = 397$$

   (b) $a_k = \sin(k \cdot 90°)$ Gesucht: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

   Lösung:

   $$a_1 = \sin(90°) = 1$$
   $$a_2 = \sin(180°) = 0$$
   $$a_3 = \sin(270°) = -1$$
   $$a_4 = \sin(360°) = 0$$
   $$a_5 = \sin(450°) = 1$$

   (c) $a_k = k^2 - 2k + 3$ Gesucht: a_5 und a_{10}

   Lösung:

   $$a_5 = 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 = 18$$
   $$a_{10} = 10^2 - 2 \cdot 10 + 3 = 83$$

   (d) $a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ Gesucht: a_1, a_2, a_3

   Lösung:

   $$a_1 = 1$$
   $$a_2 = \tfrac{-1}{4}$$
   $$a_3 = \tfrac{1}{9}$$

2. **Explizite Definition.** Wie lautet eine explizite Definition der Folge?

   (a) $a_1 = 5 \quad a_2 = 7 \quad a_3 = 9 \quad a_4 = 11$

   Lösung: $a_k = 3 + 2k$

   (b) $a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 9 \quad a_4 = 16$

Lösung: $a_k = k^2$

(c) $a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 8 \quad a_4 = 16$

Lösung: $a_k = 2^k$

(d) $a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad a_4 = 1$

Lösung: $a_k = (-1)^k$

3. Rekursive Definition.

(a) Wie lautet das fünfte Glied a_5 der Folge $a_1 = 4 \quad a_{k+1} = 2a_k - 5$?

Lösung:

$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 5 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$
$$a_4 = 2 \cdot a_3 - 5 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$
$$a_5 = 2 \cdot a_4 - 5 = 2 \cdot (-3) - 5 = -11$$

(b) Wie lautet das fünfte Glied a_5 der Folge $a_1 = 0 \quad a_{k+1} = k \cdot a_k + 1$?

Lösung:

$$a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 = 1 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$a_4 = 3 \cdot a_3 + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$
$$a_5 = 4 \cdot a_4 + 1 = 4 \cdot 10 + 1 = 41$$

(c) Wie lautet eine rekursive Definition der Folge $(a_k) = (-10; -7; -4; -1; \ldots)$?

Lösung:

$$a_1 = -10 \qquad a_{k+1} = a_k + 3$$

(d) Wie lautet eine rekursive Definition der Folge $(a_k) = (3; -6; 12; -24; 48; \ldots)$?

Lösung:

$$a_1 = 3 \qquad a_{k+1} = -2 \cdot a_k$$

4. Arithmetische Folgen.

(a) Wie lautet die explizite Definition der arithmetischen Folge mit $a_3 = 9$ und $a_8 = 34$?

Lösung:

$$d = \frac{a_8 - a_3}{8 - 3} = \frac{34 - 9}{5} = 5$$
$$a_1 = a_3 - 2d = 9 - 10 = -1$$
$$a_k = -1 + (k-1) \cdot 5 = 5k - 6$$

(b) Wie lautet die explizite Definition der arithmetischen Folge mit der rekursiven Form $a_1 = 15 \quad a_{k+1} = a_k + 11$?

Lösung:

$$d = 11$$
$$a_k = 15 + (k-1) \cdot 11 = 15 + 11k - 11 = 11k + 4$$

(c) Eine arithmetische Folge besteht aus 20 Gliedern. Das erste Glied lautet $a_1 = 4$, die Differenz ist $d = 3$. Wie gross ist die Summe aller Glieder?

Lösung:

$$s_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 4 \cdot 20 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 3 = 650$$

(d) Wie gross ist die Summe der ganzen Zahlen von 37 bis 95?

Lösung:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 59 \cdot \frac{37 + 95}{2} = 3894$$

5. Geometrische Folgen.

(a) Wie lautet die explizite Definition der geometrischen Folge mit der rekursiven Form $a_1 = 7 \quad a_{k+1} = 0.9 \cdot a_k$?

Lösung:

$$a_k = 7 \cdot 0.9^{k-1}$$

(b) Wie lautet die explizite Definition der geometrischen Folge mit den ersten zwei Gliedern $a_1 = 3$ und $a_2 = 4$?

Lösung:

$$q = \tfrac{4}{3}$$
$$a_k = 3 \cdot \left(\tfrac{4}{3}\right)^{k-1}$$

(c) Wie lautet die explizite Definition der geometrischen Folge mit $a_2 = 8$ und $a_5 = 216$?

Lösung:

$$\begin{aligned} a_5 &= a_2 \cdot q^3 && \text{einsetzen} \\ 216 &= 8 \cdot q^3 && : 8 \\ 27 &= q^3 && \sqrt[3]{} \\ 3 &= q \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{8}{3}$$
$$a_k = \frac{8}{3} \cdot 3^{k-1}$$

(d) Wie lautet die explizite Definition der geometrischen Folge mit $a_4 = 100$ und $a_6 = 25$?

Lösung:

$$\begin{aligned} a_6 &= a_4 \cdot q^2 && \text{einsetzen} \\ 25 &= 100 \cdot q^2 && : 100 \\ \frac{1}{4} &= q^2 && \sqrt{} \\ \pm\frac{1}{2} &= q \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{100}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 100 \cdot 2^3 = 800$$
$$a_k = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Variante mit $q = \frac{-1}{2}$:

$$a_k = -800 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1}$$

6. **Summenzeichen interpretieren.** Berechnen Sie die folgenden Summen.
Lösungsvideo zu (a) bis (e), Lösungsvideo zu (f)

(a) $\sum_{i=1}^{3} i^2$

Lösung: $1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = \boxed{14}$

(b) $\sum_{k=6}^{9} kx_k$

Lösung: $\boxed{6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9}$

(c) $\sum_{k=1}^{3} 6$

Lösung: $6 + 6 + 6 = \boxed{18}$

(d) $\sum_{k=5}^{5} 7k$

Lösung: $7 \cdot 5 = \boxed{35}$

(e) $\sum_{m=5}^{7} (m^2 - m)$

Lösung: $5^2 - 5 + 6^2 - 6 + 7^2 - 7 = 25 - 5 + 36 - 6 + 49 - 7 = \boxed{92}$

(f) $\sum_{k=0}^{50} (2k - \frac{1}{3})$

Lösung: $2 \cdot \sum_{k=0}^{50} k - \sum_{k=0}^{50} \frac{1}{3} = \boxed{2533}$

7. **Summenzeichen interpretieren.** Welches Resultat ergeben die folgenden Summen?

(a) $\sum_{x=1}^{3} 2x$

Lösung: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = \boxed{12}$

(b) $\sum_{k=1}^{50} k$

Lösung: $50 \cdot \frac{1+50}{2} = 50 \cdot \frac{51}{2} = \boxed{1275}$

(c) $\sum_{x=2}^{4} \frac{1}{x}$

Lösung: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{13}{12}}$

(d) $\sum_{x=2}^{5}(x+2)$

Lösung: $(2+2)+(3+2)+(4+2)+(5+2)=4+5+6+7=\boxed{22}$

(e) $\sum_{k=21}^{25}(2k+1)$

Lösung:

$$\begin{aligned}&=(2\cdot 21+1)+(2\cdot 22+1)+(2\cdot 23+1)+(2\cdot 24+1)+(2\cdot 25+1)\\&=43+45+47+49+51=\boxed{235}\end{aligned}$$

(f) $\sum_{k=1}^{5}(-1)^k$

Lösung: $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5=(-1)+1+(-1)+1+(-1)=\boxed{-1}$

8. **Summenzeichen anwenden.** Wie können die folgenden Summen mit dem Summenzeichen geschrieben werden?

(a) $5+6+7+8+9+10+11$

Lösung: $\sum_{k=5}^{11}k$

(b) $10+20+30+40+50$

Lösung: $\sum_{k=1}^{5}10k=10\cdot\sum_{k=1}^{5}k$

(c) $1+2+4+8+16+32$

Lösung: $\sum_{k=0}^{5}2^k$

(d) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

Lösung: $\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k}$

(e) $1+4+9+16+25+36+49$

Lösung: $\sum_{k=1}^{7} k^2$

(f) $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49$

Lösung: $\sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} k^2$

9. **Summenzeichen anwenden.** Wie können die folgenden Summen mit dem Summenzeichen geschrieben werden?

(a) $3m + 4m + 5m + 6m + 7m + 8m$

Lösung: $\sum_{k=3}^{8} km$

(b) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2$

Lösung: $\sum_{k=2}^{5} x^k$

(c) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

Lösung: $\sum_{k=1}^{6} a_k$

(d) $-b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + b_6$

Lösung: $\sum_{k=1}^{6} (-1)^k b_k$