Arithmetische Folgen

1. **Arithmetische Folge.** Handelt es sich bei der Folge um eine arithmetische Folge? Falls ja, geben Sie die rekursive und explizite Definition an.

   (a) $1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ \ldots$

   Lösung: Ja, rekursive Definition:

   $$a_1 = 1 \qquad a_{k+1} = a_k + 3$$

   explizite Definition:

   $$a_k = 1 + (k-1) \cdot 3 = 3k - 2$$

   (b) $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ \ldots$

   Lösung: Ja, rekursive Definition:

   $$a_1 = 1 \qquad a_{k+1} = a_k + 1$$

   explizite Definition:

   $$a_k = 1 + (k-1) \cdot 1 = k$$

   (c) $-2;\ 3;\ 8;\ 13;\ 18;\ 25;\ \ldots$

   Lösung: Nein, da

   $$18 - 13 = 5 \neq 7 = 25 - 18$$

   (d) $12;\ 20;\ 28;\ 36;\ \ldots$

   Lösung: Ja, rekursive Definition:

   $$a_1 = 12 \qquad a_{k+1} = a_k + 8$$

   explizite Definition:

   $$a_k = 12 + (k-1) \cdot 8 = 8k + 4$$

   (e) $17;\ 14;\ 11;\ 9;\ 6;\ 3;\ 0;\ \ldots$

   Lösung: Nein, da

   $$11 - 14 = -3 \neq -2 = 9 - 11$$

   (f) $50;\ 40;\ 30;\ 20;\ 10;\ 0;\ -10;\ -20;\ \ldots$

Lösung: Ja, rekursive Definition:

$$a_1 = 50 \qquad a_{k+1} = a_k - 10$$

explizite Definition:

$$a_k = 50 + (k-1) \cdot (-10) = 60 - 10k$$

2. **Arithmetische Folge.** Berechnen Sie das fünfte Glied der arithmetischen Folge.

(a) $a_1 = 6 \qquad a_{k+1} = a_k + 8$

Lösung:

$$a_5 = 38$$

(b) $3;\ 7;\ 11;\ 15;\ \ldots$

Lösung:

$$a_5 = 19$$

(c) $a_k = 5 + (k-1) \cdot 7$

Lösung:

$$a_5 = 33$$

(d) $a_1 = 35 \qquad d = 5$

Lösung:

$$a_5 = 55$$

3. **Arithmetische Folge.** Von einer arithmetischen Folge sind zwei Glieder bekannt. Geben Sie die rekursive und explizite Definition der Folge an und berechnen Sie das gesuchte Glied.

(a) $a_3 = 5 \qquad a_5 = 6 \qquad a_{20} = ?$

Lösung: rekursiv:

$$a_1 = 4 \qquad a_{k+1} = a_k + 0.5$$

explizit:

$$a_k = 4 + (k-1) \cdot 0.5$$

gesuchtes Glied berechnen:

$$a_{20} = 13.5$$

(b) $a_{10} = 12 \qquad a_{20} = 18 \qquad a_4 = ?$

Lösung: rekursiv:

$$a_1 = 6.6 \qquad a_{k+1} = a_k + 0.6$$

explizit:

$$a_k = 6.6 + (k-1) \cdot 0.6$$

gesuchtes Glied berechnen:

$$a_4 = 8.4$$

(c) $a_1 = 2 \qquad a_{2775} = 524'288 \qquad a_3 = ?$

Lösung: rekursiv:

$$a_1 = 2 \qquad a_{k+1} = a_k + 189$$

explizit:

$$a_k = 2 + (k-1) \cdot 189$$

gesuchtes Glied berechnen:

$$a_3 = 380$$

4. **Arithmetische Folge.** Von einer arithmetischen Folge ist das erste Folgenglied $a_1 = 1.2$ und die Differenz $d = 2.1$ bekannt. Die Folge besteht aus $n = 20$ Zahlen.

(a) Wie lautet das letzte Folgenglied a_{20}?

Lösung: Allgemeine Formel: $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$

$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot d = 1.2 + 19 \cdot 2.1 = \boxed{41.1}$

(b) Wie gross ist die Summe aller Folgenglieder?

Lösung: Allgemeine Formel: $s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$

$s_{20} = 20 \cdot \dfrac{1.2 + 41.1}{2} = \boxed{423}$

5. **Arithmetische Folge.** Von einer arithmetischen Folge ist das erste Folgenglied $a_1 = 404$, das letzte Folgenglied $a_n = -9$ und die Differenz $d = -7$ bekannt.

(a) Aus wie vielen Zahlen besteht die Folge?

Lösung: Allgemeine Formel: $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$

Einsetzen: $-9 = 404 + (n-1) \cdot (-7)$

nach n auflösen. $n = 60$

(b) Wie gross ist die Summe aller Folgenglieder?

Lösung: Allgemeine Formel: $s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$

$s_{60} = 60 \cdot \dfrac{404 + (-9)}{2} = 30 \cdot 395 = \boxed{11'850}$

6. **Arithmetische Folge.** Von einer arithmetischen Folge ist das letzte Folgenglied $a_n = 125$, die Länge $n = 61$ sowie die Summe $s_n = 3965$ bekannt.

(a) Wie lautet das erste Folgenglied a_1?

Lösung:

$a_1 = 5$

(b) Wie lautet die Differenz d?

Lösung:

$d = 2$

7. **Arithmetische Folge.** Von einer arithmetischen Folge sind die beiden letzten Folgenglieder $a_{20} = 16$ und $a_{21} = 22$ bekannt.

(a) Wie lautet das erste Folgenglied a_1?

Lösung:

$a_1 = -98$

(b) Wie lautet die Summe aller Zahlen s_{21}?

Lösung:

$s_{21} = -798$

8. **Arithmetische Folge.** Von einer arithmetischen Folge ist das letzte Folgenglied $a_{20} = 51$ und die Summe $s_{20} = 260$ bekannt.

(a) Wie lautet das erste Folgenglied a_1?

Lösung:

$a_1 = -25$

(b) Wie lautet die Differenz d?

Lösung:

$$d = 4$$

9. **Arithmetische Folge.** Von einer arithmetischen Folge sind die ersten zwei Glieder $a_1 = 6$ und $a_2 = 9$ bekannt. Die Folge besteht aus $n = 100$ Zahlen.

   (a) Wie lautet das letzte Folgenglied a_{100}?

   Lösung:

   $$a_{100} = 303$$

   (b) Wie gross ist die Summe aller Zahlen s_{100}?

   Lösung:

   $$s_{100} = 15'450$$

10. **Teilbare Zahlen.** Lösen Sie diese Aufgaben mit Hilfe einer arithmetischen Folge. Gesucht sind alle vierstelligen Zahlen, welche durch 54 teilbar sind.

   (a) Wie viele solche Zahlen gibt es?

   Lösung: Kleinste Zahl ist: $a_1 = 19 \cdot 54 = 1026$, grösste Zahl ist $a_n = 185 \cdot 54 = 9990$

   $$n = 167$$

   (b) Wie gross ist die Summe dieser Zahlen?

   Lösung:

   $$s_{167} = 919'836$$

11. **Dreieck.** Die drei Seiten a, b, c eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge. Die Hypotenuse ist 15 cm lang. Wie lang sind die anderen Seiten?

   Lösung: Die Katheten sind 9 cm und 12 cm lang.

12. **Fünf Zahlen.** Fünf Zahlen bilden eine arithmetische Folge. Die Summe der ersten drei Zahlen ist 63, die der letzten drei Zahlen ist 87. Wie lauten die fünf Zahlen?

   Lösung: Die fünf Zahlen lauten $17;\ 21;\ 25;\ 29;\ 33$

13. Darlehen. Sie erhalten von Ihren Eltern ein zinsloses Darlehen von 12'000 Franken, das Sie wie folgt in Raten zurückzahlen sollen: Ende des ersten Jahres müssen Sie 2000 Franken zurückzahlen, danach jedes Jahr 500 Franken mehr als im Vorjahr. Nach wie vielen Jahren haben Sie das Darlehen zurückbezahlt? Wie hoch ist die letzte Rate, die Sie bezahlen müssen?

Lösung: Die Raten bilden eine arithmetische Folge mit $a_1 = 2000$ und $d = 500$. Gesucht ist die kleinste ganze Zahl n mit $s_n \geq 12'000$.

$$s_n = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} = n \cdot \frac{4000 + 500(n-1)}{2} = 250n^2 + 1750n$$

$$250n^2 + 1750n = 12'000 \qquad : 250 \qquad n^2 + 7n - 48 = 0$$

$$n = \frac{-7 + \sqrt{49 + 192}}{2} = \frac{-7 + \sqrt{241}}{2} \approx 4.26$$

Da n keine ganze Zahl ist, werden 4 volle Raten gezahlt und im 5. Jahr der verbleibende Rest tilgiert:

$$s_4 = 250 \cdot 16 + 1750 \cdot 4 = 11'000$$

$$\text{Rest} = 12'000 - 11'000 = 1000$$

Das Darlehen ist nach 5 Jahren zurückbezahlt. Die letzte Rate beträgt 1000 Franken.

14. Lohn. Sie treten eine neue Stelle in einem Unternehmen an, wobei Sie zwischen den Lohnvarianten A und B wählen dürfen:

- Variante A: Das Jahresgehalt beträgt im ersten Jahr 120'000 Franken und der jährliche Lohnanstieg 8000 Franken.
- Variante B: Das Semestergehalt beträgt im ersten Semester 60'000 Franken und der halbjährliche Lohnanstieg 2000 Franken.

Welche Lohnvariante ist auf längere Sicht die vorteilhaftere, d.h. wie gross ist bei beiden Varianten den Gesamtverdienst über eine Zeitspanne von zehn Jahren ab Stellenantritt (ohne Berücksichtigung allfälliger Zinsen)?

Lösung: Variante A (jährlich): Arithmetische Folge mit $a_1 = 120'000$, $d = 8000$, $n = 10$.

$$s_{10} = 10 \cdot \frac{2 \cdot 120'000 + (10-1) \cdot 8000}{2} = 5 \cdot (240'000 + 72'000) = 1'560'000$$

Variante B (halbjährlich): Arithmetische Folge mit $a_1 = 60'000$, $d = 2000$, $n = 20$ (20 Semester in 10 Jahren).

$$s_{20} = 20 \cdot \frac{2 \cdot 60'000 + (20-1) \cdot 2000}{2} = 10 \cdot (120'000 + 38'000) = 1'580'000$$

Variante B ist auf längere Sicht vorteilhafter (20'000 Franken mehr).