Geometrische Folgen

1. **Geometrische Folge.** Handelt es sich bei der Folge um eine geometrische Folge? Falls ja, wie lautet die rekursive und explizite Definition?

   (a) $1;\ 1.1;\ 1.21;\ 1.331;\ \ldots$

   Lösung: Ja, geometrische Folge mit $q = 1.1$.

   rekursive Definition:

   $$a_1 = 1 \qquad a_{k+1} = 1.1 \cdot a_k$$

   explizite Definition:

   $$a_k = 1 \cdot 1.1^{k-1} = 1.1^{k-1}$$

   (b) $0.1;\ 0.2;\ 0.4;\ \ldots$

   Lösung: Ja, geometrische Folge mit $q = 2$.

   rekursive Definition:

   $$a_1 = 0.1 \qquad a_{k+1} = 2 \cdot a_k$$

   explizite Definition:

   $$a_k = 0.1 \cdot 2^{k-1}$$

   (c) $24;\ -18;\ 12;\ \ldots$

   Lösung: Nein, da

   $$\frac{-18}{24} = -0.75 \neq -\frac{2}{3} = \frac{12}{-18}$$

   (d) $0.9;\ 0.99;\ 0.999;\ \ldots$

   Lösung: Nein, da

   $$\frac{0.99}{0.9} = 1.1 \neq \frac{0.999}{0.99} \approx 1.009$$

   (e) $0.9;\ 0.81;\ 0.729;\ \ldots$

   Lösung: Ja, geometrische Folge mit $q = 0.9$.

   rekursive Definition:

   $$a_1 = 0.9 \qquad a_{k+1} = 0.9 \cdot a_k$$

   explizite Definition:

   $$a_k = 0.9 \cdot 0.9^{k-1} = 0.9^k$$

(f) $12;\ -18;\ 27;\ \ldots$

Lösung: Ja, geometrische Folge mit $q = -1.5$.

rekursive Definition:

$$a_1 = 12 \qquad a_{k+1} = -1.5 \cdot a_k$$

explizite Definition:

$$a_k = 12 \cdot (-1.5)^{k-1}$$

2. Geometrische Folge. Von der geometrischen Folge mit dem Quotienten q sind zwei Glieder gegeben. Wie lautet der Quotient und wie lautet das achte Glied a_8?

(a) $a_1 = 64 \qquad a_2 = 96$

Lösung: Ja, geometrische Folge mit $q = \frac{96}{64} = \frac{3}{2}$.

$$a_8 = 64 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^7 = 1093.5$$

(b) $a_2 = 8 \qquad a_5 = 216$

Lösung: Ja, geometrische Folge. $q^3 = \frac{216}{8} = 27 \Rightarrow q = 3$.

$$a_1 = \tfrac{8}{3} \qquad a_8 = \tfrac{8}{3} \cdot 3^7 = 5\,832$$

(c) $a_7 = 100 \qquad a_{10} = -12.5$

Lösung: Ja, es ist eine geometrische Folge.

$$q^3 = \tfrac{-12.5}{100} = -\tfrac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad q = \tfrac{-1}{2}$$
$$a_1 = a_7 : \left(\tfrac{-1}{2}\right) 6400$$
$$a_8 = 100 \cdot \left(\tfrac{-1}{2}\right) = -50$$

(d) $a_4 = \frac{9}{2} \qquad a_{15} = 9216$

Lösung: Ja, es ist eine geometrische Folge.

$$q^{11} = \tfrac{9216}{9/2} = 2048 \quad \Longrightarrow \quad q = 2$$
$$a_1 = \tfrac{9}{2} \cdot 2^{-3} = \tfrac{9}{16}$$
$$a_8 = \tfrac{9}{16} \cdot 2^7 = 72$$

3. Geometrische Folge. Vier Zahlen bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = 2$ und der Summe 60. Wie heissen die vier Zahlen?

Lösung: Die vier Zahlen lauten $4;\ 8;\ 16;\ 32$

4. **Geometrische Folge.** Von einer geometrischen Folge kennt man: $a_1 = 5$, $q = 2$ und $s_n = 5115$.

   (a) Aus wie vielen Zahlen besteht die Folge?

   Lösung: $n = 10$

   (b) Wie lautet das letzte Folgenglied?

   Lösung: $a_{10} = 2560$

5. **Geometrische Folge.** Die beiden ersten Glieder einer geometrischen Folge lauten $a_1 = 6$ und $a_2 = 9$. Die Folge besteht aus $n = 10$ Zahlen.

   (a) Wie lauten die nächsten drei Glieder?

   Lösung:

   $a_3 = 13.5$ $a_4 = 20.25$ $a_5 = 30.375$

   (b) Wie lautet das letzte Folgenglied auf vier Dezimalstellen genau?

   Lösung: $a_{10} \approx 230.6602$

   (c) Wie gross ist die Summe aller Glieder auf eine Dezimalstelle genau?

   Lösung: $s_{10} \approx 680.0$

6. **Geometrische Folge.** Von einer geometrischen Folge sind die ersten zwei und das letzte Glied bekannt:

   $a_1 = 17'408$ $a_2 = 8704$ $a_n = 68$

   (a) Wie lautet der Quotient q?

   Lösung:

   $$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8704}{17'408} = \frac{1}{2}$$

   (b) Aus wie vielen Zahlen besteht die Folge?

Lösung:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} && \text{einsetzen} \\ 68 &= 17'408 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} && : 17'408 \\ \tfrac{1}{256} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} && \log_{\frac{1}{2}} \\ 8 &= n-1 && +1 \\ 9 &= n \end{aligned}$$

Die Folge besteht aus neun Zahlen.

(c) Wie gross ist die Summe aller Glieder?

Lösung:

$$s_9 = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 17'408 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = 17'408 \cdot \frac{1-\frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = 17'408 \cdot \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = 17'408 \cdot \frac{2 \cdot 511}{512} = 34'748$$

7. **Geometrische Reihen.** Berechnen Sie die Summe der ersten zehn Glieder der folgenden Folgen in rekursiver Darstellung:

(a) $a_n = 3^{n-1}$

Lösung: Zunächst wird das erste Glied und der Quotient bestimmt:

$$a_1 = 3^0 = 1 \qquad q = 3$$

Nun kann die Summe mit der Formel berechnet werden:

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-3^{10}}{1-3} = \frac{-59048}{-2} = 29524$$

(b) $b_n = (-1)^{n-1}$

Lösung: Zunächst wird das erste Glied und der Quotient bestimmt:

$$b_1 = (-1)^0 = 1 \qquad q = -1$$

Nun kann die Summe mit der Formel berechnet werden:

$$s_{10} = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-(-1)^{10}}{1-(-1)} = \frac{1-1}{2} = 0$$

(c) $c_n = 8 \cdot 2^{n-1}$

Lösung: Zunächst wird das erste Glied und der Quotient bestimmt:

$$c_1 = 8 \cdot 2^0 = 8 \qquad q = 2$$

Nun kann die Summe mit der Formel berechnet werden:

$$s_{10} = c_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 8 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 8 \cdot \frac{1-1024}{-1} = 8 \cdot 1023 = 8184$$

(d) $d_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Lösung: Zunächst wird das erste Glied und der Quotient bestimmt:

$$d_1 = 9 \qquad\qquad q = \tfrac{1}{2}$$

Nun kann die Summe mit der Formel berechnet werden:

$$s_{10} = d_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 9 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 9 \cdot \frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = 9 \cdot \frac{\frac{1023}{1024} \cdot 1024}{\frac{1}{2} \cdot 1024} = 9 \cdot \frac{1023}{512} \approx 17.98$$

8. **Kapital.** Berechne bei einem festen Jahreszinssatz von 5 % den Wert, den ein Kapital von 1000 Franken

(a) in 10 Jahren erreichen wird.

Lösung:

$$K = 1000 \cdot 1.05^{10} \approx 1628.89 \,\text{Fr}$$

(b) vor 10 Jahren hatte.

Lösung:

$$K = \frac{1000}{1.05^{10}} \approx 613.91 \,\text{Fr}$$

9. **Schulden.** Jemand möchte eine Schuld von 100'000 Franken durch sechs Raten zu je 20'000 Franken tilgen. Die Abzahlung wird jeweils zu Jahresende geleistet. Wie hoch ist die Restschuld, die am Ende des siebten Jahres noch zu bezahlen ist, wenn die Bank mit einem Zinssatz von 7 % rechnet?

Lösung: Dazu wird die Zinsformel mit nachschüssigen Zahlungen verwendet. Die vorgegebenen Werte sind:

$K_0 = 100'000$	Anfangskapital
$p = 0.07$	Zinssatz
$q = 1 + p = 1.07$	Wachstumsfaktor / Quotient / Aufzinsfaktor
$b = -20'000$	

Nun wird die Schuld nach sieben Jahren berechnet:

$$K_7 = K_0 \cdot q^7 + b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 100'000 \cdot 1.07^7 - 20'000 \cdot \frac{1.07^7 - 1}{1.07 - 1} \approx -12'502$$

Das bedeutet, dass im letzten Jahr 12'502 Franken zu viel abbezahlt wurden. Es muss nur noch die Restschuld von

$$20'000 - 12'502 = 7498$$

Franken abbezahlt werden.

10. Rente. Wie oft kann von einem Kapital von 100'000 Franken eine Jahresrente von 10'000 Franken bezogen werden, wenn die Bank zu 5 % verzinst? Die Rente wird jeweils am Jahresende ausbezahlt.

Lösung: Dazu wird die Zinsformel mit nachschüssigen Zahlungen verwendet. Die vorgegebenen Werte sind:

$K_0 = 100'000$	Anfangskapital
$p = 0.05$	Zinssatz
$q = 1 + p = 1.05$	Wachstumsfaktor / Quotient / Aufzinsfaktor
$b = -10'000$	

Die Frage ist, wann das Kapital aufgebraucht ist, also für welches n das Kapital $K_n = 0$ ist.

$$\begin{aligned}
0 &= K_0 \cdot q^n + b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} && \text{einsetzen} \\
0 &= 100'000 \cdot 1.05^n - 10'000 \cdot \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1} && \text{ausrechnen} \\
0 &= 100'000 \cdot 1.05^n - 200'000 \cdot (1.05^n - 1) && : 100'000 \\
0 &= 1.05^n - 2 \cdot (1.05^n - 1) && \text{ausmultiplizieren} \\
0 &= 1.05^n - 2 \cdot 1.05^n + 2 && \text{ausklammern} \\
0 &= -1.05^n + 2 && +1.05^n \\
1.05^n &= 2 && \text{logarithmieren} \\
n &= \log_{1.05}(2) \approx 14.2
\end{aligned}$$

Die Rente kann 14 mal bezogen werden, danach ist zuwenig Kapital vorhanden, um noch die volle Rente zu beziehen.

11. Ratenzahlung. Jemand kauft in einem Onlineshop einen Fernseher für 2000 Franken. Die Person muss eine Anzahlung von 200 Franken leisten und dann sechs monatliche Raten bezahlen. Der Anbieter verrechnet einen effektiven Jahreszins von 16 %. Wie gross ist eine Rate?

Lösung: Die Restschuld nach der Anzahlung beträgt

$$K = 2000 - 200 = 1800 \text{ Fr.}$$

Der effektive monatliche Zinssatz ist

$$i_m = \sqrt[12]{1.16} - 1 \approx 0.012445.$$

Die monatliche Rate ergibt sich zu

$$R = K \cdot \frac{i_m}{1-(1+i_m)^{-6}} = 1800 \cdot \frac{0.012445}{1-1.012445^{-6}} \approx 313.20\,\text{Fr.}$$

12. Weizenkornlegende. Sissa ibn Dahir lebte angeblich im dritten oder vierten Jahrhundert in Indien und gilt Legenden zufolge als der Erfinder des Schachspiels. Der indische Herrscher Shihram tyrannisierte seine Untertanen und stürzte sein Land in Not und Elend. Um die Aufmerksamkeit des Königs auf seine Fehler zu lenken, ohne seinen Zorn zu entfachen, schuf der weise Brahmane Sissa ein Spiel, in welchem der König als wichtigste Figur ohne Hilfe anderer Figuren und Bauern nichts ausrichten kann. Der Unterricht im Schachspiel machte auf den Herrscher Shihram einen starken Eindruck. Er wurde milder und liess das Schachspiel verbreiten, damit alle davon Kenntnis nähmen.

Um sich für die anschauliche Lehre von Lebensweisheit und zugleich Unterhaltung zu bedanken, gewährte er dem Brahmanen einen freien Wunsch. Dieser wünschte sich Weizenkörner: Auf das erste Feld eines Schachbretts wollte er ein Korn, auf das zweite Feld das Doppelte, also zwei, auf das dritte wiederum die doppelte Menge, also vier und so weiter. Der König lachte und war gleichzeitig erbost über die vermeintliche Bescheidenheit des Brahmanen.

Als sich Shihram einige Tage später erkundigte, ob Sissa seine Belohnung in Empfang genommen habe, musste er hören, dass die Rechenmeister die Menge der Weizenkörner noch nicht berechnet hätten. Der Vorsteher der Kornkammer meldete nach mehreren Tagen ununterbrochener Arbeit, dass er diese Menge Getreidekörner im ganzen Reich nicht aufbringen könne. Nun stellte er sich die Frage, wie das Versprechen eingelöst werden könne. Der Rechenmeister half dem Herrscher aus der Verlegenheit, indem er ihm empfahl, er solle Sissa ibn Dahir ganz einfach das Getreide Korn für Korn zählen lassen.

(a) Wie viele Körner schuldete der König dem Erfinder Sissa?

Lösung: Es handelt sich um eine geometrische Folge mit $a_1 = 1$ und $q = 2$, bestehend aus $n = 64$ Gliedern (die 64 Felder des Schachbretts). Die Summe beträgt

$$S_{64} = \frac{1 \cdot (2^{64}-1)}{2-1} = 2^{64} - 1 = 1.845 \cdot 10^{19}.$$

Der König schuldet dem Erfinder also etwa 18.45 Trillionen Weizenkörner.

(b) Die Masse von Tausend Weizenkörnern beträgt etwa 50 g. 2016 betrug die weltweite Jahresproduktion von Weizen ungefähr 750 Millionen Tonnen. Wie viele Jahre müsste die ganze Welt auf Weizen verzichten, um die Forderung von Sissa zu erfüllen?

Lösung: Die Gesamtmasse der Weizenkörner beträgt

$$m = 1.845 \cdot 10^{19} \cdot \frac{50\,\text{g}}{1000} = 9.223 \cdot 10^{8}\,\text{t}.$$

Bei einer weltweiten Jahresproduktion von $P = 7.5 \cdot 10^8$ t ergibt sich

$$T = \frac{m}{P} = \frac{9.223 \cdot 10^8}{7.5 \cdot 10^8} \approx 1.230 \cdot 10^3\,\text{Jahre}.$$

Die ganze Welt müsste also etwa 1230 Jahre lang auf Weizen verzichten, um die Forderung von Sissa zu erfüllen.