Grenzwerte

1. **Grenzwert.** Gegeben ist die Folge $a_n = 7 + \frac{1}{n}$.
   (a) Was ist vermutlich der Grenzwert a der Folge?
   (b) Welche Glieder sind weniger als 0.05 von diesem Grenzwert entfernt?
   (c) Welche Glieder sind weniger als 0.003 von diesem Grenzwert entfernt?
   (d) Welche Glieder sind weniger als 0.00007 von diesem Grenzwert entfernt?

2. **Grenzwert.** Gegeben ist die Folge $a_n = 8 - \frac{1}{n^2}$.
   (a) Was ist vermutlich der Grenzwert a der Folge?
   (b) Welche Glieder sind weniger als 0.05 von diesem Grenzwert entfernt?
   (c) Welche Glieder sind weniger als 0.003 von diesem Grenzwert entfernt?
   (d) Welche Glieder sind weniger als 0.00007 von diesem Grenzwert entfernt?

3. **Grenzwerte.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls vorhanden, mit Hilfe der Grenzwertsätze.
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)$
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^4}\right)$
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n^2}\right)$
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2}{3n}\right)$
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$

4. **Grenzwertregeln.** Bestimmen Sie die Grenzwerte mit Hilfe der Grenzwertsätze.
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(4+\frac{1}{n^2}\right)\right)$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-2n}{3n+3}\right)$
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1-n}\right)$
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+3}{n^2-1}\right)$
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n+4}{-5n^2+n-1}\right)$
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-8}{3n^3+n^2-8n-4}\right)$
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2-2n+4}{n-1}\right)$
   (h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-8}{3n^3+n^2-8n-4}\right)$

5. **MathemaTrick.** Bestimmen Sie die Grenzwerte. Lösungsvideo
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-3n^2}{4n^3+2}\right)$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7\cdot\left(3-\frac{7+6n}{2n}\right)\right)$
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{4}\right)$

6. **Unendliche geometrische Reihen.** Berechnen Sie die Summe aller Folgenglieder dieser geometrischen Folgen, die in expliziter Form gegeben sind.

(a) $a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(b) $b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

(c) $c_n = 50 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

(d) $d_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

7. Periodische Dezimalbrüche. Mit unendlichen geometrischen Reihen können periodische Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche umgewandelt werden.

Beispiel. $0.\overline{3} = 0.33333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \cdots = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{1}{3}$

Wandeln Sie mit diesem Verfahren die folgenden Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche um.

(a) $0.\overline{4}$

(b) $0.\overline{17}$

(c) $0.\overline{9}$

(d) $4.5\overline{135}$

8. Turm. Ein Kind baut einen Turm aus 8 Plastikwürfeln. Die Seitenlänge des ersten Würfels beträgt 12 cm, jeder weitere hat die 0.8-fache Seitenlänge des vorigen.

(a) Erstellen Sie eine Formel für die Seitenlänge a_k des k-ten Würfels in rekursiver und expliziter Form.

(b) Berechen Sie die Seitenlänge des achten Würfels.

(c) Ermittlen Sie die Höhe des Turmes.

(d) Wie hoch kann er höchstens werden, wenn die Anzahl der Würfel beliebig gross wird?