Grenzwerte

1. **Grenzwert.** Gegeben ist die Folge $a_n = 7 + \frac{1}{n}$.

   (a) Was ist vermutlich der Grenzwert a der Folge?

   Lösung: $a = 7$

   (b) Welche Glieder sind weniger als 0.05 von diesem Grenzwert entfernt?

   Lösung: $n > 20$

   (c) Welche Glieder sind weniger als 0.003 von diesem Grenzwert entfernt?

   Lösung: $n > 333$

   (d) Welche Glieder sind weniger als 0.00007 von diesem Grenzwert entfernt?

   Lösung: $n > 14285$

2. **Grenzwert.** Gegeben ist die Folge $a_n = 8 - \frac{1}{n^2}$.

   (a) Was ist vermutlich der Grenzwert a der Folge?

   Lösung: Der Grenzwert ist vermutlich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 8$.

   (b) Welche Glieder sind weniger als 0.05 von diesem Grenzwert entfernt?

   Lösung: Gesucht ist n mit $|a_n - 8| < 0.05$:

   $$\left|8 - \frac{1}{n^2} - 8\right| < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > 20 \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt{20} \approx 4.47.$$

   Also sind alle Glieder mit $\mathbf{n \geq 5}$ (bzw. $n > 4$) weniger als 0.05 vom Grenzwert entfernt.

   (c) Welche Glieder sind weniger als 0.003 von diesem Grenzwert entfernt?

   Lösung: Gesucht ist n mit $|a_n - 8| < 0.003$:

   $$\frac{1}{n^2} < 0.003 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > \tfrac{1}{0.003} = 333\tfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt{333.\overline{3}} \approx 18.26.$$

   Also sind alle Glieder mit $\mathbf{n \geq 19}$ (bzw. $n > 18$) weniger als 0.003 vom Grenzwert entfernt.

   (d) Welche Glieder sind weniger als 0.00007 von diesem Grenzwert entfernt?

   Lösung: Gesucht ist n mit $|a_n - 8| < 0.00007$:

   $$\frac{1}{n^2} < 0.00007 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > \tfrac{1}{0.00007} = 14\,285.\overline{714285} \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt{14'285.71} \approx 119.52.$$

   Alle Glieder mit $n \geq 120$ sind weniger als 0.00007 vom Grenzwert entfernt.

3. Grenzwerte. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls vorhanden, mit Hilfe der Grenzwertsätze.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$

Lösung: Die harmonische Folge hat den Grenzwert Null.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(4\cdot\tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)\\ &= 4\cdot 0\cdot 0=0\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^4}\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^4}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(5\cdot\tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}5\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)\\ &= 5\cdot 0\cdot 0\cdot 0=0\end{aligned}$$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n^2}\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(5+3\cdot\tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)\\ &= 5+3\cdot 0\cdot 0=5\end{aligned}$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2}{3n}\right)$

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{5}{3}\cdot n\right)$$

Die Folge **divergiert**, da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\cdot n\right)$ beliebig gross wird.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$

Lösung: Die Folge **divergiert**, da aufeinander folgende Glieder immer einen Abstand von 2 haben.

4. Grenzwertregeln. Bestimmen Sie die Grenzwerte mit Hilfe der Grenzwertsätze.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(4+\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(4+\frac{1}{n^2}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}4+\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{1}{n}\right)\right)\\ &= 0\cdot(4+0\cdot 0)=0\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-2n}{3n+3}\right)$

Lösung: Zähler und Nenner werden durch n dividiert:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-2n}{3n+3}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}-2}{3+\frac{3}{n}}\right)\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}2}{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n}\right)}\\ &= \frac{0-2}{3+3\cdot 0}=\frac{-2}{3}\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1-n}\right)$

Lösung: Zähler und Nenner werden durch n dividiert:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1-n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}-1}\right)\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}1}\\ &= \frac{1}{0-1}=-1\end{aligned}$$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+3}{n^2-1}\right)$

Lösung: Zähler und Nenner werden durch n^2 dividiert:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+3}{n^2-1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\right)\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}7+\lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)}\\ &= \frac{7+3\cdot 0\cdot 0}{1-0\cdot 0}=\frac{7}{1}=7\end{aligned}$$

(e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n+4}{-5n^2+n-1}\right)$

Lösung: Zähler und Nenner werden durch n^2 dividiert:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n+4}{-5n^2+n-1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{-5+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(4\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}(-5)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)}\\ &= \frac{3-2\cdot 0+4\cdot 0\cdot 0}{-5+0-0\cdot 0}=\frac{3}{-5}=\frac{-3}{5}\end{aligned}$$

(f) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-8}{3n^3+n^2-8n-4}\right)$

Lösung: Zähler und Nenner werden durch n^3 dividiert:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-8}{3n^3+n^2-8n-4}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{8}{n^3}}{3+\frac{1}{n}-\frac{8}{n^2}-\frac{4}{n^3}}\right)\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\left(8\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(8\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(4\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right.}\\ &= \frac{1-8\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{3+0-8\cdot 0\cdot 0-4\cdot 0\cdot 0\cdot 0}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(g) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2-2n+4}{n-1}\right)$

Lösung: Zähler und Nenner werden durch n dividiert:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2-2n+4}{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-2+\frac{4}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)$$

Der Nenner strebt gegen $1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=1$. Der Zähler wird mit $\lim_{n\to\infty}(5n)$ beliebig gross, daher **divergiert** die Folge, sie hat keinen Grenzwert.

(h) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-8}{3n^3+n^2-8n-4}\right)$

Lösung: Zähler und Nenner werden durch n^3 dividiert:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-8}{3n^3+n^2-8n-4}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{8}{n^3}}{3+\frac{1}{n}-\frac{8}{n^2}-\frac{4}{n^3}}\right)\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(8\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(8\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(4\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right.}\\ &= \frac{0-8\cdot0\cdot0\cdot0}{3+0-8\cdot0\cdot0-4\cdot0\cdot0\cdot0}=\frac{0}{3}=0\end{aligned}$$

5. MathemaTrick. Bestimmen Sie die Grenzwerte. Lösungsvideo

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-3n^2}{4n^3+2}\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-3n^2}{4n^3+2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\cdot\left(2-3\cdot\frac{1}{n}\right)}{n^3\cdot\left(4+2\cdot\frac{1}{n^3}\right)}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-3\cdot\frac{1}{n}}{4+2\cdot\frac{1}{n^3}}\right)=\frac{2-0}{4+0}=\boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7\cdot\left(3-\frac{7+6n}{2n}\right)\right)$

Lösung: Zunächst wird die Subtraktion ausgerechnet:

$$3-\frac{7+6n}{2n}=\frac{3\cdot2n}{2n}-\frac{7+6n}{2n}=\frac{6n-7-6n}{2n}=\frac{-7}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(7\cdot\left(3-\frac{7+6n}{2n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-49}{2n}\right)=\boxed{0}$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot2}{2^{n-1}\cdot2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2^n}\right)=\boxed{0}$$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{4}\right)$

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{4}\right)=\frac{2}{4}\lim_{n\to\infty}n-\frac{5}{4}$$

Die Folge divergiert, es gibt keinen Grenzwert.

6. **Unendliche geometrische Reihen.** Berechnen Sie die Summe aller Folgenglieder dieser geometrischen Folgen, die in expliziter Form gegeben sind.

   (a) $a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

   Lösung: Zunächst wird das erste Folgenglied a_1 und der Faktor q bestimmt.

   $$a_1 = 9 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 = 9 \qquad q = \tfrac{1}{2}$$

   Nun wird mit der Formel der Grenzwert der Reihe berechnet:

   $$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{9}{1-\frac{1}{2}} = \frac{9 \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{18}{1} = \boxed{18}$$

   (b) $b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

   Lösung: Zunächst wird das erste Folgenglied b_1 und der Faktor q bestimmt.

   $$b_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^0 = \tfrac{1}{2} \qquad q = \tfrac{3}{4}$$

   Nun wird mit der Formel der Grenzwert der Reihe berechnet:

   $$s = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4}{\frac{1}{4} \cdot 4} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

   (c) $c_n = 50 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

   Lösung: Zunächst wird das erste Folgenglied c_1 und der Faktor q bestimmt.

   $$c_1 = 50 \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^0 = 50 \qquad q = \tfrac{1}{5}$$

   Nun wird mit der Formel der Grenzwert der Reihe berechnet:

   $$s = \frac{c_1}{1-q} = \frac{50}{1-\frac{1}{5}} = \frac{50 \cdot 5}{\frac{4}{5} \cdot 5} = \frac{250}{4} = \boxed{\tfrac{125}{2} = 62.5}$$

   (d) $d_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

   Lösung: Zunächst wird das erste Folgenglied d_1 und der Faktor q bestimmt.

   $$d_1 = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 = 3 \qquad q = \tfrac{1}{3}$$

   Nun wird mit der Formel der Grenzwert der Reihe berechnet:

   $$s = \frac{d_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot 3}{\frac{2}{3} \cdot 3} = \boxed{\tfrac{9}{2} = 4.5}$$

7. **Periodische Dezimalbrüche.** Mit unendlichen geometrischen Reihen können periodische Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche umgewandelt werden.

   Beispiel. $0.\overline{3} = 0.33333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \cdots = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$

Wandeln Sie mit diesem Verfahren die folgenden Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche um.

(a) $0.\overline{4}$

(b) $0.\overline{17}$

(c) $0.\overline{9}$

(d) $4.5\overline{135}$

8. Turm. Ein Kind baut einen Turm aus 8 Plastikwürfeln. Die Seitenlänge des ersten Würfels beträgt 12 cm, jeder weitere hat die 0.8-fache Seitenlänge des vorigen.

(a) Erstellen Sie eine Formel für die Seitenlänge a_k des k-ten Würfels in rekursiver und expliziter Form.

Lösung: rekursive Form:

$$a_1 = 12 \qquad a_k = 0.8 \cdot a_{k-1}$$

explizite Form:

$$a_k = 12 \cdot 0.8^{k-1}$$

(b) Berechen Sie die Seitenlänge des achten Würfels.

Lösung:

$$a_8 = 12 \cdot 0.8^{8-1} = 12 \cdot 0.8^7 = 2.5165824 \approx 2.52\,\text{cm}$$

(c) Ermittlen Sie die Höhe des Turmes.

Lösung:

$$s_8 = a_1 \cdot \frac{1-q^8}{1-q} = 12 \cdot \frac{1-0.8^8}{1-0.8} \approx 49.93\,\text{cm}$$

(d) Wie hoch kann er höchstens werden, wenn die Anzahl der Würfel beliebig gross wird?

Lösung:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{12}{1-0.8} = \frac{12}{0.2} = 60\,\text{cm}$$