Musterprobe Folgen und Reihen

Zeit: 40 Minuten, Hilfsmittel: Taschenrechner und Fundamentum

Aufgabe	1	2	3	4	Total	Note
max. Punkte	9	8	8	10	35	
Punkte						

Folgende Grenzwerte gelten als bekannt (c ist eine konstante Zahl, q ist eine konstante Zahl, deren Betrag kleiner als Eins ist):

$$\lim_{n\to\infty} c = c \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^c}\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{q^n}\right) = 0$$

1. Folge. **(9 P)**

Gegeben ist diese rekursive Darstellung einer Folge: $a_1 = 100 \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$

(a) Bestimmen Sie die ersten sechs Glieder der Folge. (3P)

Lösung:

$$a_1 = 100 \qquad a_2 = 20 \qquad a_3 = 4 \qquad a_4 = 0.8 \qquad a_5 = 0.16 \qquad a_6 = 0.032$$

Bewertung:

- mindestens vier Werte korrekt **1P**
- alle sechs Werte korrekt zusätzlich **1P**
- korrekte Schreibweise der Folgenglieder mit tiefgestelltem Index **1P**

(b) Um was für eine Art von Folge handelt es sich? (1P)

◯ arithmetisch ◯ algebraisch √ **geometrisch** ◯ quadratisch

(c) Geben Sie die explizite Darstellung der Folge an. (3P)

Lösung: Verschiedene Darstellungen sind möglich:

$$a_k = 100 \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^{k-1} = 100 \cdot \frac{1}{5^{k-1}} = 100 \cdot 0.2^{k-1}$$

Bewertung:

- korrekte Formel (eine der drei Varianten) **2P**
- deutliche, exakte Darstellung der Formel (k tief- bzw. hochgestellt) **1P**

(d) Geben Sie a_{20} in wissenschaftlicher Schreibweise an. (2P)

Lösung:

$$a_{20} = 100 \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^{20-1} = 5.243 \cdot 10^{-12}$$

Bewertung:

- korrekte Zahl **1P**
- korrekte und exakte Darstellung in wissenschaftlicher Schreibweise **1P**

2. Grenzwerte. **(8 P)**

Gegeben ist die explizite Darstellung einer Folge:

$$a_n = \frac{1-n^2}{2n^2+n}$$

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n), indem Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze umformen und auf bekannte Grenzwerte zurückführen. (6P)

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n^2}{2n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-n^2):n^2}{(2n^2+n):n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^2}-1}{2+\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{0-1}{2+0} = \frac{-1}{2}$$

Bewertung:

- Schreibweise Limes teilweise korrekt **1P**
- zusätzlich Schreibweise Limes immer korrekt zusätzlich **1P**
- Trick Erweitern mit : n^2 vorhanden **1P**
- Zerlegung in bekannte Grenzwerte vorhanden **2P**
- korrektes Ergebnis **1P**

(b) Beschreiben Sie, wie sofort erkannt werden kann, ob die Folge konvergiert oder nicht. (2P)

Lösung: Die höchste Potenz von n im Zähler und Nenner wird betrachtet. Die Folge konvergiert, wenn diese im Nenner mindestens so gross is wie im Zähler.

Bewertung:

-

3. Summenzeichen. **(8 P)**

(a) Berechnen Sie folgende Summe schrittweise: $2 \cdot \sum_{k=1}^{5}(2k-1)$ (3P)

Lösung:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{5}(2k-1) = 2 \cdot ((2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+(2\cdot 4-1)+(2\cdot 5-1))$$

$$= 2 \cdot (1+3+5+7+9) = 2 \cdot 25 = 50$$

- Vier einzelne Summanden korrekt **1P**
- Alle einzelnen Summanden korrekt zusätzlich **1P**
- Korrektes Ergebnis **1P**

(b) Schreiben Sie die folgende Summe mit einem Summenzeichen: $17+15+13+11+9+7+5+3+1$ (3P)

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{9}(2k-1) = \sum_{k=0}^{8}(2k+1)$$

Bewertung:

- Korrekte Schreibweise des Summenzeichens inkl. Grenzen **1P**
- Korrekte Formel ($2k \pm 1s$) **1P**
- Grenzen und Formel passen zusammen, d.h. korrekte Lösung **1P**

(c) Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Formel in einem einzelnen deutschen Satz: (2P)

$$s = \sum_{k=0}^{20}$$

Lösung: «s ist die Summe der ersten zwanzig natürlichen Zahlen.»

- inhaltlich korrekt **1P**
- sprachlich korrekt **1P**

4. Ferienwohnung. (10 P)

Eine Ferienwohnung kostet in der ersten Wochen 1200 Franken. Jede weitere Woche in der Wohnung kostet 10 % weniger als die vorangehende Woche.

Die Kosten a_k in der k-ten Woche bilden eine Folge.

(a) Um was für eine Folge handelt es sich? (1P)

Lösung: Um eine geometrische Folge.

(b) Geben Sie eine rekursive Formel für die Folge an. (2P)

Lösung:

$$a_{k+1} = a_k \cdot 0.9 \qquad a_1 = 1200$$

(c) Geben Sie eine explizite Formel für die Folge an. (2P)

Lösung:

$$a_k = 1200 \cdot 0.9^{k-1}$$

(d) Wieviel kostet die letzte Woche, wenn die Wohnung für sieben Wochen gemietet wird. (1P)

Lösung:

$$a_7 = 1200 \cdot 0.9^{7-1} = 637.7292$$

Die letzte Woche kostet $\boxed{637.730 \text{ Franken}}$.

(e) Wieviel kostet es insgesamt, die Wohnung neun Wochen lang zu mieten? (2P)

Lösung: Die Summenformel für die geometrische Reihe lautet:

$$s_n = p \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Mit den eingesetzten Werten ergibt sich:

$$s_9 = 1200 \cdot \frac{1-0.9^9}{1-0.9} \approx 7350.954$$

Die zehn Wochen kosten insgesamt $\boxed{\text{7350.95 Franken}}$.

(f) Wieviel kostet es theoretisch, die Wohnung dauerhaft, also «auf ewig», zu mieten? (2P)

Lösung: Die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe lautet:

$$s = \frac{p}{1-q} = \frac{1200}{1-0.9} = 12000$$

Das kostet $\boxed{\text{12'000 Franken}}$.