Rentenrechnung

Aufgabenstellung

Ein Anfangskapital K_0 wird jährlich verzinst. Das bedeutet, dass jeweils am Ende von jedem Jahr das Kapital um einen bestimmten Prozentsatz p erhöht wird. Damit bildet das Kapital eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = 1 + p$:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Zusätzlich wird jedoch am Ende von jedem Jahr zusätzliche ein fixer Betrag b zum Kapital hinzugefügt.

Rekursive Berechnung

Dies kann mit einer rekursiven Folge ausgedrückt werden:

$$K_{n+1} = K_n \cdot q + b$$

Mit der rekursiven Definition werden die ersten paar Glieder berechnet:

$$K_1 = K_0 \cdot q + b$$
$$K_2 = K_1 \cdot q + b = (K_0 \cdot q + b) \cdot q + b = K_0 \cdot q^2 + bq + b$$
$$K_3 = K_2 \cdot q + b = (K_0 \cdot q^2 + bq + b) \cdot q + b = K_0 \cdot q^3 + bq^2 + bq + b$$

Explizite Formel

Damit ergibt sich folgende explizite Formel für das Kapital:

$$K_n = K_0 \cdot q^n + \left(b + bq + \cdots + bq^{n-1}\right) = K_0 \cdot q^n + \sum_{k=1}^{n} bq^{k-1}$$

Nun sehen wir, dass die Summe der einbezahlten Beträge die Summe einer geometrischen Folge mit der expliziten Darstellung $b_n = b \cdot q^{n-1}$ ist und mit der bekannten Summenformel berechnet werden kann, also

$$\sum_{k=1}^{n} bq^{k-1} = b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Damit ergibt sich die folgende Formel für regelmässige, **nachschüssige** Zahlungen:

$$K_n = K_0 \cdot q^n + b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Dabei sind

K_n : das Kapital nach n Jahren
K_0 : das Anfangskapital
$q = p + 1$: der Aufzinsfaktor (Fundamentum: r)
p : der Jahreszins in Prozent
b : der Betrag der regelmässigen Zahlungen
n : die Laufzeit in Jahren