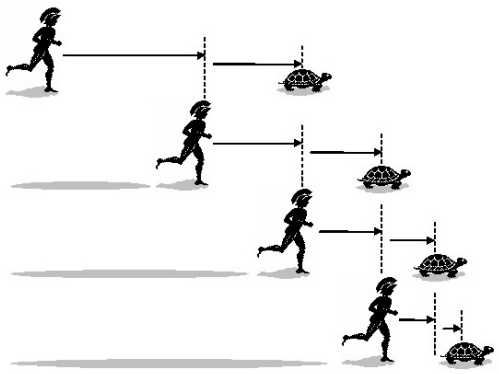
Grenzwerte

Stefan Rothe

04.08.2026



Inhaltsverzeichnis

1 Begriffe **2**
2 Summen **5**
3 Arithmetische Folgen **7**
4 Geometrische Folgen **8**
5 Weitere Folgen **9**
6 Grenzwerte von Folgen **10**
7 Reihen **14**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Begriffe

1.1 Folge

Eine Folge (a_k) ist eine Funktion, welche einer positiven natürlichen Zahl eine reelle Zahl y zuordnet. Die einzelnen Zahlen a_k der Folge werden als **Glieder** der Folge bezeichnet.

Bei Folgen wird die übliche Schreibweise von Funktionen $a(k) = y$ durch eine Indexschreibweise $a_k = y$ ersetzt.

natürliche Zahl	1	2	3	$\dots$	k	$k+1$	$\dots$	n
reelle Zahl	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_k	a_{k+1}	$\dots$	a_n

Anders betrachtet ist eine **Folge** (a_k) eine Aufzählung von reellen Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge, welche durch die natürlichen Zahlen vorgegeben ist. Das k-te Folgenglied wird mit a_k bezeichnet.

Wenn eine Folge ein letztes Glied a_n hat, wird sie als **endliche Folge** bezeichnet. Sie besteht aus insgesamt n Gliedern. Eine Folge ohne letztes Glied wird **unendliche Folge** genannt.

Beispiel. *Die endliche Folge (t_k) der Anzahl Tore des Schweizer Teams an der Euro 2025 lautet*

Spiel	k	1	2	3	4
Anzahl Tore	t_k	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_3 = 1$	$t_4 = 0$

Es ist eine endliche Folge mit vier Gliedern, das dritte Folgenglied ist $t_3 = 1$.

Beispiel. *Die unendliche Folge der Quadratzahlen (q_k) lautet:*

natürliche Zahl	k	1	2	3	4	5	$\dots$
Quadratzahl	q_k	$q_1 = 1$	$q_2 = 4$	$q_3 = 9$	$q_4 = 16$	$q_5 = 25$	$\dots$

Es ist eine unendliche Folge, das fünfte Folgenglied lautet $q_5 = 25$.

Im folgenden werden verschiedene Darstellungsmöglichkeiten von Folgen betrachtet.

1.2 Aufzählung der Glieder

Endliche Folgen können durch die Aufzählung aller Glieder dargestellt werden.

Beispiel. *Die Folge (t_k) der Anzahl Tore des Schweizer Teams an der Euro 2025 lautet:*

$$(t_k): \quad 1; 2; 1; 0$$

Bei unendlichen Folgen können nicht alle Glieder angegeben werden. Deshalb werden diese durch Punkte abgekürzt.

Beispiel. *Die Folge (q_k) der Quadratzahlen lautet:* $(q_k): \quad 1; 4; 9; 16; 25; \dots$

Damit ist aber nicht festgelegt, wie die Folge weitergeht. Aus mathematischer Sicht ist diese Darstellungsform nicht präzise genug. Deshalb werden für unendliche Folgen andere Darstellungsformen benötigt.

1.3 Explizite Darstellung

Eine Folge (a_k) kann durch eine Rechenvorschrift dargestellt werden, welche angibt, wie das Folgenglied a_k aus k berechnet wird. Dies entspricht der Darstellung einer Funktion mit einer Funktionsgleichung.

Beispiel. *Die Folge der Quadratzahlen (q_k) hat die explizite Darstellung*

$$q_k = k^2$$

Damit kann sofort jedes Folgenglied berechnet werden, so ist beispielsweise

$$q_7 = 7^2 = 49$$

1.4 Rekursive Darstellung

Manchmal ist es einfacher, anzugeben, wie aus einem beliebigen Folgenglied das nächste berechnet werden kann. Wenn auch das erste Glied bekannt ist, kann damit jedes Glied der Folge berechnet werden.

Die rekursive Darstellung benötigt immer zwei Angaben:

- Der **Rekursionsanfang** wird durch die Angabe des ersten Folgenglieds a_1 gemacht.
- Der **Rekursionsschritt** ist eine Rechenvorschrift, welche angibt, wie aus einem Glied a_k das nächste Glied a_{k+1} berechnet wird.

Somit kann aus dem ersten Folgenglied mit dem Rekursionsschritt das zweite Glied berechnet werden. Daraus kann das dritte Glied berechnet werden und so weiter.

Beispiel. *Die Folge der ungeraden Zahlen (u_k) hat die folgende rekursive Darstellung:*

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 && \textit{(Rekursionsanfang)} \\ u_{k+1} &= u_k + 2 && \textit{(Rekursionsschritt)} \end{aligned}$$

Die weiteren Folgenglieder können mit Hilfe des Rekursionsschritts so berechnet werden:

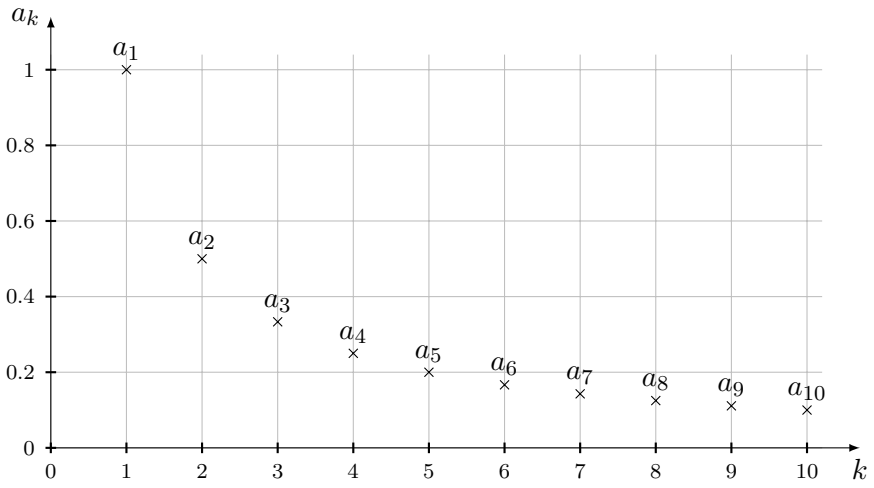
$$\begin{aligned} n = 1: &\quad u_2 = u_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ n = 2: &\quad u_3 = u_2 + 2 = 3 + 2 = 5 \\ n = 3: &\quad u_4 = u_3 + 2 = 5 + 2 = 7 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

1.5 Grafische Darstellung

Da eine Folge (a_k) eine Funktion ist, kann sie auch als Funktionsgraph in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Dabei entsprechen die natürlichen Zahlen k der x-Koordinate und die Folgenglieder a_k der y-Koordinate der Punkte des Graphen.

Da die Definitionsmenge die positiven natürlichen Zahlen sind, besteht der Graph aus einzelnen Punkten, er ist keine zusammenhängende Linie.

Beispiel. *Die Folge (a_k) mit der expliziten Darstellung $a_k = \frac{1}{k}$ hat folgende grafische Darstellung:*



1.6 Reihe

Eine Reihe ist die Folge der Teilsummen einer Folge. Ist eine Folge (a_k) gegeben, so wird die zugehörige Reihe (s_k) wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
s_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Beispiel. *Die Reihe (s_k) der Anzahl Tore des Schweizer Teams an der Euro 2025 lautet*

Spiel	k	1	2	3	4
Anzahl Tore	t_k	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_3 = 1$	$t_4 = 0$
Total Tore	s_k	$s_1 = 1$	$s_2 = 3$	$s_3 = 5$	$s_4 = 5$

Das Glied s_3 gibt an, wie viele Tore bis und mit dem dritten Spiel insgesamt erzielt worden sind. Das letzte Glied s_4 gibt an, wie viele Tore insgesamt erzielt worden sind.

2 Summen

2.1 Summenzeichen

Um eine Summe mit vielen Summanden darzustellen, wird eine neue Schreibweise mit dem grossen griechischen Buchstaben Sigma Σ eingeführt:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\sum_{k=1}^{10} k$$

Dabei wird eine Variable k verwendet, in welche verschiedene natürliche Zahlen eingesetzt werden. Die Variable und die erste Zahl werden unterhalb des Σ-Zeichens geschrieben, der letzte Wert oberhalb des Zeichens. Alle Terme, welche durch einsetzen der Zahl für k entstehen, werden summiert.

Beispiel. *Hier werden nacheinander die Zahlen 2 bis 5 im Term $7k$ für k eingesetzt. Die Terme werden summiert:*

$$\sum_{k=2}^{5} 7k = 7\cdot 2+7\cdot 3+7\cdot 4+7\cdot 5$$

Mit dieser Notation kann die Teilsumme der ersten n Glieder der Folge (a_n) viel kompakter geschrieben werden:

$$s_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

2.2 Rechenregeln

Beim Rechnen mit dem Summenzeichen gelten natürlich die gleichen Regeln wie bei «normalen» Summen. Hier werden die wichtigsten Regeln für das Summenzeichen vorgestellt. Dabei sind $S(k)$ und $T(k)$ beliebige Terme, welche die Variable k enthalten.

Konstante. Wird ein von k unabhängiger Wert summiert, so kann die Summe als Produkt geschrieben werden. Die Anzahl Summanden entspricht der um Eins erhöhten Differenz der Grenzen a und b.

$$\sum_{k=a}^{b} c = (b-a+1)\cdot c$$

Beispiel. $\displaystyle\sum_{k=4}^{10} 42 = (10-4+1)\cdot 42 = 7\cdot 42 = 294$

Konstanter Faktor. Ein konstanter Faktor, d.h. ein Term, der nicht von der Summenvariable k abhängig ist, kann aus dem Summenzeichen ausgeklammert werden.

$$\sum_{k=a}^{b} c \cdot T(k) = c \cdot \sum_{k=a}^{b} T(k)$$

Beispiel. $\sum_{k=0}^{3} 2(k+1) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{3} (k+1) = 2(1+2+3+4) = 2 \cdot 10 = 20$

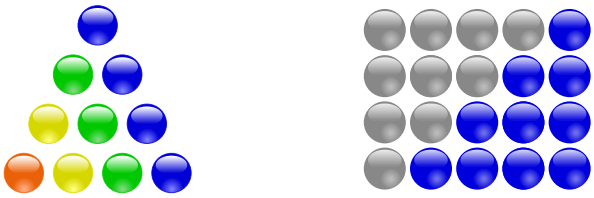
Summe. Eine Summe kann in zwei Summen aufgeteilt werden.

$$\sum_{k=a}^{b} (S(k) + T(k)) = \sum_{k=a}^{b} S(k) + \sum_{k=a}^{b} T(k)$$

Beispiel. $\sum_{k=1}^{3} (k+5) = \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} 5 = (1+2+3) + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21$

2.3 Dreieckszahlen

Die Dreieckszahlen Δ_k ergeben sich, indem die Anzahl Kugeln gezählt werden, welche in einem Dreieck angeordnet werden können.



Die n-te Dreieckszahl ist die Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen:

$\Delta_1 = 1$
$\Delta_2 = 1 + 2 = 3$
$\Delta_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$\Delta_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$\Delta_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
$\Delta_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

Die Dreieckszahlen können auch mit einer einfachen Formel berechnet werden. Dazu werden die Kugeln einer Dreieckszahl verdoppelt und wie oben rechts abgebildet in einem Rechteck angeordnet. Daraus ergibt sich die folgende Formel.

Dreieckszahlen. Die Dreieckszahlen Δ_n sind die Teilsummen der Folge der positiven natürlichen Zahlen.

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

3 Arithmetische Folgen

3.1 Definition

Eine arithmetische Folge (a_k) ist eine Folge, bei welcher die Differenz d zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Es gilt also immer

$$a_{k+1} - a_k = d$$

Aus dieser Definition und einem Startwert c kann sofort die rekursive Darstellung einer arithmetischen Folge abgeleitet werden.

Rekursive Darstellung. Die rekursive Darstellung einer arithmetischen Folge (a_k) mit dem Startwert c und der Differenz d lautet

$$a_1 = c \qquad\qquad a_{k+1} = a_k + d$$

Beispiel. *Die Folge der ungeraden Zahlen (u_k) ist eine arithmetische Folge mit dem Startwert 1 und der Differenz $d = 2$. Sie hat die rekursive Darstellung*

$$u_1 = 1 \qquad\qquad u_{k+1} = u_k + 2$$

3.2 Explizite Darstellung

Wenn die Glieder einer arithmetischen Folge (a_k) mit der Differenz d durch wiederholte Anwendung des Rekursionsschritts berechnet werden, ergibt sich ein Muster:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + 0 \cdot d \\ a_2 = a_1 + d &= a_1 + 1 \cdot d \\ a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d &= a_1 + 2 \cdot d \\ a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d &= a_1 + 3 \cdot d \end{aligned}$$

Daraus kann die explizite Formel für arithmetische Folgen abgeleitet werden:

Explizite Darstellung. Die explizite Darstellung einer arithmetischen Folge (a_k) mit dem Startwert a_1 und der Differenz d lautet

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

Beispiel. *Die Folge der ungeraden Zahlen (u_k) hat die explizite Darstellung*

$$u_k = 1 + (k-1) \cdot 2 = 1 + 2k - 2 = 2k - 1$$

Das bedeutet, dass die k-te ungerade Zahl mit der Formel $2k - 1$ berechnet werden kann. So ist die fünfte ungerade Zahl $2 \cdot 5 - 1 = 9$.

4 Geometrische Folgen

4.1 Definition

Eine geometrische Folge (a_k) ist eine Folge, bei welcher der Quotient q zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Es gilt also

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$$

Aus dieser Definition und einem Startwert c kann sofort die rekursive Darstellung einer geometrischen Folge abgeleitet werden.

Rekursive Darstellung. Die rekursive Darstellung einer geometrischen Folge (a_k) mit dem Startwert c und dem Quotienten q lautet

$$a_1 = c \qquad\qquad a_{k+1} = a_k \cdot q$$

Beispiel. *Die Folge der Zweierpotenzen (b_k) ist eine geometrische Folge mit dem Startwert 2 und dem Quotienten $q = 2$. Sie hat die rekursive Darstellung*

$$b_1 = 2 \qquad\qquad b_{k+1} = b_k \cdot 2$$

4.2 Explizite Darstellung

Wenn die Glieder einer geometrischen Folge (a_k) mit dem Quotienten q durch wiederholte Anwendung des Rekursionsschritts berechnet werden, ergibt sich ein Muster:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^0 \\ a_2 = a_1 \cdot q &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q &= a_1 \cdot q^2 \\ a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q &= a_1 \cdot q^3 \end{aligned}$$

Daraus kann die explizite Formel für geometrische Folgen abgeleitet werden:

Explizite Darstellung. Die explizite Darstellung einer geometrischen Folge (a_k) mit dem Rekursionsanfang a_1 und dem Quotienten q lautet

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

Beispiel. *Die Folge der Zweierpotenzen (b_k) hat die explizite Darstellung*

$$b_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$$

5 Weitere Folgen

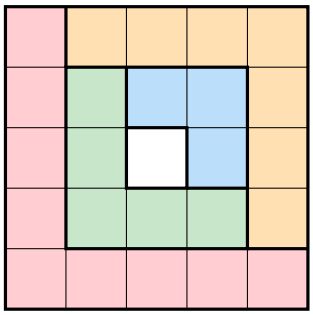
5.1 Folge der Quadratzahlen

Für die Folge der Quadratzahlen kann die explizite Darstellung sofort angegeben werden:

Die Folge der Quadratzahlen (q_k) hat die folgende explizite Darstellung:

$$q_k = k^2$$

Diese Folge hat aber auch eine rekursive Darstellung. Diese ergibt sich aus der folgenden Überlegung:



Das weisse Quadrat hat die Fläche Eins. Das Quadrat von Zwei ergibt sich, indem drei blaue Quadrate hinzugefügt werden. Um das Quadrat von Drei zu erhalten, müssen fünf Einheiten hinzugefügt werden, dann sieben und so weiter.

Daraus ergibt sich die rekursive Darstellung dieser Folge:

Die Folge der Quadratzahlen (q_k) hat die folgende rekursive Darstellung:

$$q_1 = 1 \qquad q_{k+1} = q_k + (2k + 1)$$

5.2 Harmonische Folge

Die harmonische Folge ist die Folge der Kehrwerte der positiven natürlichen Zahlen.

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots$$

Sie hat die explizite Darstellung

$$h_k = \frac{1}{k}$$

Die harmonische Folge zählt die möglichen Frequenzteilungen einer stehenden Welle auf, wie sie bei Saiten- und Blasinstrumenten entstehen. Diese Teilungen sind wichtig für die Erklärung von Harmonien in der Musik.

5.3 Konstante Folge

Eine Folge, bei welcher alle Folgenglieder gleich sind, heisst konstante Folge.

$$2; 2; 2; 2; 2; \ldots$$

Eine konstante Folge ist sowohl eine arithmetische Folge als auch eine geometrische Folge.

6 Grenzwerte von Folgen

6.1 Definition

Eine Folge (a_k) hat den Grenzwert a, wenn sich die Glieder der Folge immer mehr an a annähern, je grösser k wird. Mathematisch schreiben wir

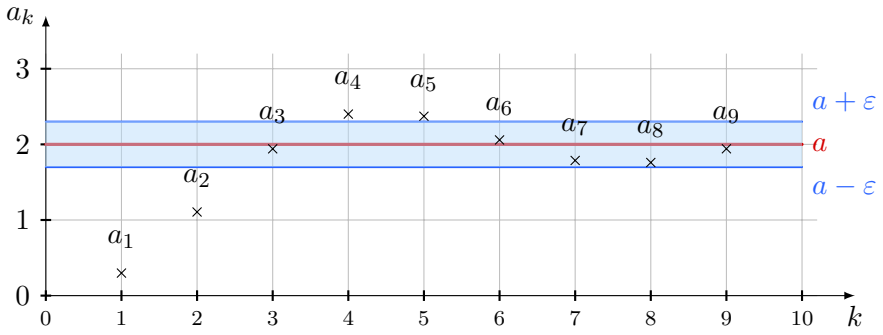
$$\lim_{k\to\infty} a_k = a$$

Wir sagen «Der Grenzwert von a_k für k gegen unendlich ist gleich a.»

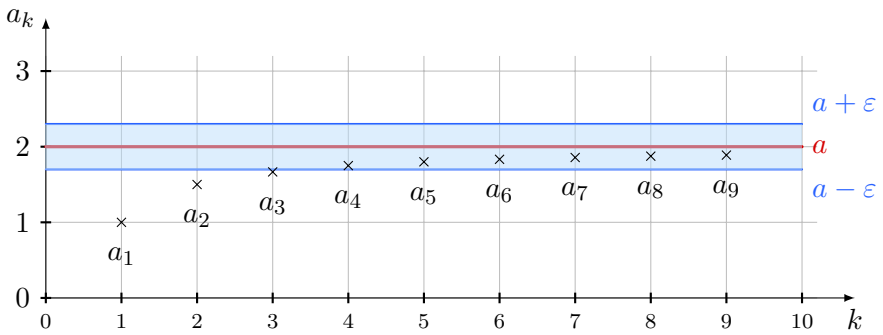
Der Grenzwert wird auch **Limes** genannt, was das lateinische Wort für Grenze ist.

Geometrisch wird der Grenzwert wie folgt definiert: a ist der Grenzwert der Folge (a_k), wenn ab einem bestimmten Folgenglied (hier ab a_6) alle weiteren Folgenglieder innerhalb eines Streifens um den Grenzwert liegen.

Die Breite ε des Streifens kann dabei beliebig gewählt werden.

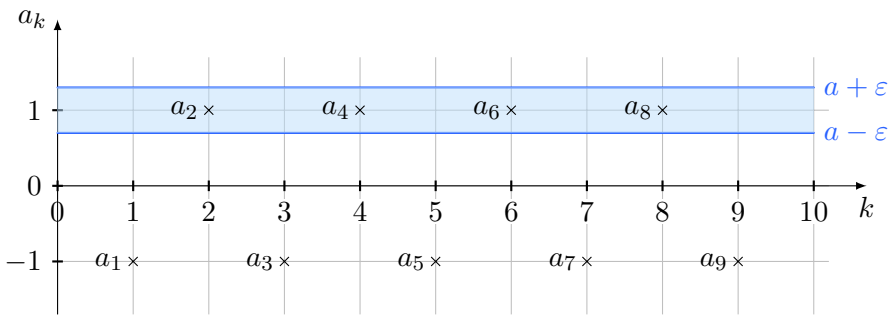


Beispiel. *Die Folge (a_k) mit der expliziten Darstellung $a_k = 2 - \frac{1}{k}$ nähert sich immer mehr dem Grenzwert $a = 2$ an. Dies ist anhand der grafischen Darstellung gut erkennbar.*



Um diesen Grenzwert mathematisch zu rechtfertigen, wird eine beliebige Breite ε gewählt. Wie auch immer diese Breite gewählt wird, es kann immer ein Folgenglied gefunden werden, ab welchem alle weiteren innerhalb des blauen Streifens liegen.

Beispiel. *Die Folge $a_k = (-1)^k$ hat keinen Grenzwert. Zwei aufeinanderfolgende Glieder haben immer einen Abstand von 2. Wird beispielsweise $\varepsilon = 0.3$ gewählt, so können nie beide innerhalb der Grenzen liegen.*



6.2 Grenzwert der konstanten Folge

Bei der konstanten Folge ist jedes Folgenglied gleich der Konstanten c. Die Differenz zum Grenzwert ist somit immer Null und die Grenzwert-Ungleichung ist immer erfüllt:

Konstante Folge. Der Grenzwert einer konstanten Folge $c_k = c$ ist gleich c.

$$\lim_{k \to \infty} c = c$$

6.3 Grenzwert der harmonischen Folge

Da die Glieder $\frac{1}{k}$ der harmonischen Folge immer kleiner werden, hat diese Folge den Grenzwert Null.

Harmonische Folge. Der Grenzwert der harmonischen Folge ist Null.

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{k} \right) = 0$$

6.4 Eulersche Zahl

Der Schweizer Mathematiker Leonard Euler hat nachgewiesen, dass dieser Grenzwert existiert und eine irrationale Zahl ist. Er hat die Zahl mit e bezeichnet. Später wurde sie ihm zu Ehren Eulersche Zahl genannt.

Eulersche Zahl. Der Grenzwert der Folge $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ existiert und ist gleich der Eulerschen Zahl.

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = e = 2.71828\ldots$$

6.5 Grenzwertsätze

Die Grenzwertsätze sind mathematische Gesetze, welche das Rechnen mit Grenzwerten erlauben. Damit können Grenzwerte von Folgen auf einfache bekannte Grenzwerte zurückgeführt werden.

Summe. Der Grenzwert einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden.

$$\lim_{k\to\infty}(a_k + b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k + \lim_{k\to\infty} b_k$$

Beispiel. $\lim_{k\to\infty}\left(2 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} 2 + \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right) = 2 + 0 = 2$

Differenz. Der Grenzwert einer Differenz ist gleich der Differenz der Grenzwerte von Minuend und Subtrahend.

$$\lim_{k\to\infty}(a_k - b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k - \lim_{k\to\infty} b_k$$

Beispiel. $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k} - 3\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right) - \lim_{k\to\infty} 3 = 0 - 3 = -3$

Produkt. Der Grenzwert eines Produkts ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren.

$$\lim_{k\to\infty}(a_k \cdot b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k \cdot \lim_{k\to\infty} b_k$$

Beispiel. $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{5}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(5 \cdot \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} 5 \cdot \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right) = 5 \cdot 0 = 0$

Quotient. Der Grenzwert eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte von Zähler und Nenner.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\lim_{k\to\infty} a_k}{\lim_{k\to\infty} b_k} \qquad \text{falls } \lim_{k\to\infty} b_k \neq 0$$

Hier wird vorausgesetzt, dass der Grenzwert des Nenners nicht gleich Null ist.

Beispiel. $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2 + \frac{1}{k}}{\frac{1}{k} + 3}\right) = \frac{\lim_{k\to\infty}\left(2 + \frac{1}{k}\right)}{\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k} + 3\right)} = \frac{2}{3}$

6.6 Grenzwert von geometrischen Folgen

Wenn bei einer geometrischen Folge der Betrag des Quotienten q kleiner als Eins ist, kommen die Folgenglieder immer näher zu Null. Also kann auch hier der Grenzwert Null vermutet werden.

Mit Hilfe zweier mathematischer Sätze, dem Archimedischen Axiom und der Bernoulli-Ungleichung, kann bewiesen werden, dass der folgende Grenzwert gilt:

Geometrische Folge 1. Der Grenzwert der Folge $a_k = q^k$ ist gleich Null, falls der Betrag von q kleiner als Eins ist:

$$\lim_{k\to\infty} q^k = 0 \qquad \text{falls } |q| < 1$$

Beispiel. *Für $q = 0.1$ ergibt sich die Folge:* $0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \ldots$

Für $q = -0.9$ ergibt sich die Folge: $-0.9, 0.81, -0.729, 0.6561, -0.59049, \ldots$

In beiden Fällen kommen die Glieder offensichtlich der Null immer näher.

Damit kann der Grenzwert einer allgemeinen geometrischen Folge (g_k) mit $|q| < 1$ durch Umformen und mit Hilfe der Grenzwertsätze hergeleitet werden:

$$\lim_{k\to\infty}\left(g_1 \cdot q^{k-1}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(g_1 \cdot \frac{q^k}{q}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{g_1}{q} \cdot q^k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{g_1}{q}\right) \cdot \lim_{k\to\infty} q^k = \frac{g_1}{q} \cdot 0 = 0$$

Der Term $\frac{g_1}{q}$ ist nicht von k abhängig und somit konstant.

Geometrische Folge. Der Grenzwert einer geometrischen Folge $g_k = g_1 \cdot q^{k-1}$, bei welcher der Betrag des Quotienten q kleiner als Eins ist, hat den Grenzwert Null:

$$\lim_{k\to\infty}\left(g_1 \cdot q^{k-1}\right) = 0 \qquad |q| < 1$$

7 Reihen

7.1 Definition

Eine Reihe ist die Folge der Teilsummen einer Folge. Ist eine Folge (a_n) gegeben, so wird die zugehörige Reihe (s_n) wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
s_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Reihe. Die zu einer Folge (a_n) gehörende Reihe (s_n) ist die Folge der Teilsummen der Folgenglieder a_n.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Beispiel. *Die Dreieckszahlen sind die Reihe der positiven natürlichen Zahlen.*

Beispiel. *Die Quadratzahlen sind die Reihe der ungeraden natürlichen Zahlen (u_n):*

$$(u_n): \quad 1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots$$

Werden nun die Teilsummen gebildet, so ergeben sich die Quadratzahlen:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1 = 1 \\
s_2 &= 1 + 3 = 4 \\
s_3 &= 1 + 3 + 5 = 9 \\
s_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16
\end{aligned}
$$

Arithmetische Reihe. Die zu der arithmetischen Folge (a_n) mit der Differenz d gehörende Reihe hat folgende Summenformel:

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = a_1 \cdot n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d$$

Diese Summenformel lässt sich mit Hilfe der Rechenregeln für Summen herleiten. Dabei ist die hinterste Summe die $(n-1)$-te Dreieckszahl.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1) \cdot d) = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1) = n \cdot a_1 + d \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k$$

Geometrische Reihe. Die zu der geometrischen Folge (a_n) mit dem Quotienten q gehörende Reihe hat folgende Summenformel:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

7.2 Grenzwert einer Reihe

Da Reihen auch Folgen sind, kann auch der Grenzwert s einer Reihe s_n bestimmt werden. Dabei wird die Schreibweise des Grenzwerts durch eine unendliche Summe abgekürzt:

Grenzwert einer Reihe. Der Grenzwert s der zu der Folge (a_n) gehörenden Reihe (s_n) ist die Summe aller Folgenglieder a_n.

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Arithmetische Reihen mit einer Differenz $d \neq 0$ sind divergent, haben also keinen Grenzwert.

Geometrische Reihen haben aber einen Grenzwert, falls der Betrag $|q|$ des Quotienten q kleiner als 1 ist, da der Term q^n dann den Grenzwert Null hat.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_1 \cdot q^{k-1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(a_1 \cdot q^{k-1} \right) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \right) = \frac{a_1}{1-q}$$

Grenzwert einer geometrischen Reihe. Der Grenzwert s der zu der geometrischen Folge (a_n) gehörenden Reihe ist

$$s = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{falls } |q| < 1$$

7.3 Anwendung: Taylorreihen

Der britische Mathematiker Brook Taylor hat ein Prinzip entdeckt, mit welchem mathematische Funktionen als unendliche Reihen dargestellt werden können. Heute wird diese Reihendarstellung verwendet um mit Computer und Taschenrechner Näherungen für wichtige Funktionen wie Exponentialfunktion, Logarithmus, Sinus und Kosinus zu berechnen:

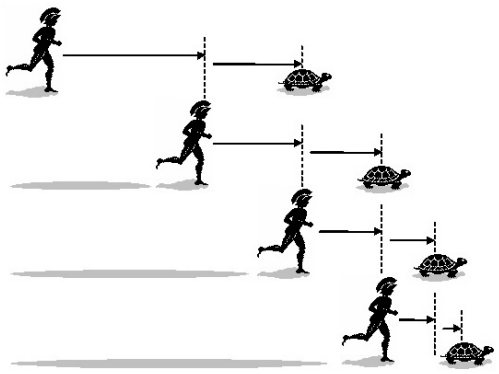
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \right)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)$$

7.4 Anwendung: Paradoxon von Achilles und der Schildkröte

Dem griechischen Philosophen Zenon von Elea wird der folgende Trugschluss zugeschrieben. Der griechische Held Achilles und eine Schildkröte machen ein Wettrennen. Die Schildkröte erhält hundert Meter Vorsprung. Obwohl Achilles fünf mal so schnell wie die Schildkröte ist, holt er sie niemals ein.

Wenn er beim Startpunkt der Schildkröte ankommt, ist die Schildkröte schon 20 m weitergekommen. Wenn Achilles dort ankommt, ist die Schildkröte 4 m weiter. Immer wenn Achilles dort ankommt, wo die Schildkröte vorher war, ist sie schon weiter. Also kann Achilles die Schildkröte nie einholen.



Mathematisch betrachtet bildet der Weg, welcher Achilles zurücklegt bis zum nächsten Punkt, an welchem sich die Schildkröte befunden hat, eine geometrische Folge mit Anfangsglied $p = 100$ und Quotient $q = \frac{1}{5}$:

$$a_n = 100 \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Um den insgesamt von Achilles zurückgelegten Weg zu berechnen, werden alle Teilstrecken summiert. Mathematisch entspricht dies der geometrischen Reihe

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(100 \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^{k-1}\right) = 100 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}}$$

Der Wert der unendlichen geometrischen Reihe ergibt die Distanz, an der Achilles die Schildkröte einholt und damit das Paradoxon auflöst:

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(100 \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^{k-1}\right) = \frac{100}{1 - \frac{1}{5}} = 125\,\mathrm{m}$$