Überblick Grenzwerte

Folgen

Eine Folge (a_k) ist eine Aufzählung von Zahlen, welche mit 1 beginnend durchnummeriert werden.

Position	1	2	3	$\dots$	k	$k+1$	$\dots$	n
Folgenglieder	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_k	a_{k+1}	$\dots$	a_n

Das erste Folgenglied wird mit a_1 bezeichnet. Des letzte Glied einer Folge der Länge n wird mit a_n bezeichnet. Ein beliebiges Folgenglied wird mit a_k bezeichnet.

explizite Darstellung

Direkte Berechnung des k-ten Folgenglieds aus k.

Beispiel. *Quadratzahlen*

$$q_k = k^2$$

rekursive Darstellung

Angabe des ersten Folgenglieds und Rechenschritt zum jeweils nächsten Glied.

Beispiel. *Quadratzahlen*

$$q_1 = 1 \qquad q_{k+1} = q_k + 2k + 1$$

arithmetische Folge

Eine arithmetische Folge (a_k) ist durch das erste Glied a_1 und die konstante Differenz d zweier Glieder definiert. Daraus ergibt sich die rekursive Darstellung:

$$a_1 = \square \qquad a_{k+1} = a_k + d$$

Die explizite Darstellung lautet:

$$a_k = \square + d \cdot (k-1)$$

Beispiel. *ungerade Zahlen* (u_k)*,* $u_1 = 1$ *und* $d = 2$*:*

rekursiv: $u_1 = 1 \qquad u_{k+1} = u_k + 2$

explizit: $u_k = 1 + 2 \cdot (k-1)$

Die Summe s_n einer arithmetischen Folge der Länge n wird so berechnet:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

geometrische Folge

Eine geometrische Folge (a_k) ist durch das erste Glied a_1 und den konstanten Quotienten q zweier Glieder definiert. Daraus ergibt sich die rekursive Darstellung:

$$a_1 = \square \qquad a_{k+1} = a_k \cdot q$$

Die explizite Darstellung lautet:

$$a_k = \square \cdot q^{k-1}$$

Beispiel. *Folge* (b_k)*,* $b_1 = 2$ *und* $q = 3$*:*

rekursiv: $b_1 = 2 \qquad b_{k+1} = b_k \cdot 3$

explizit: $b_k = 2 \cdot 3^{k-1}$

Die Summe einer geometrischen Folge wird so berechnet:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Definition

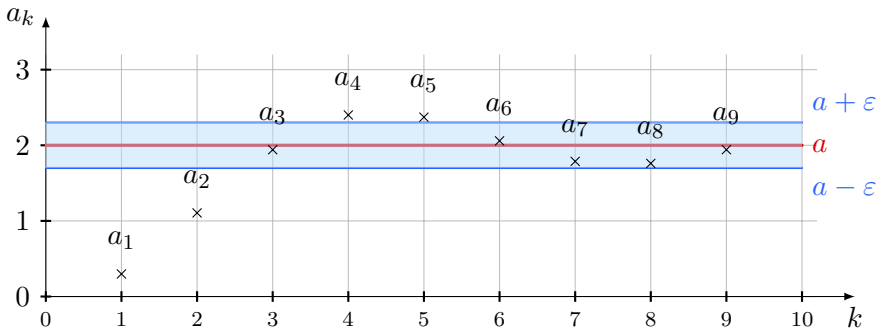
Eine Folge (a_k) hat den Grenzwert a, wenn sich die Glieder der Folge immer mehr an a annähern, je grösser k wird. Mathematisch schreiben wir

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a$$

Wir sagen «Der Grenzwert von a_k für k gegen unendlich ist gleich a.»

Präziser: a ist der Grenzwert der Folge (a_k), wenn ab einem bestimmten Folgenglied (hier ab a_6) alle weiteren Folgenglieder nicht mehr als ε von a entfernt sind.

Die Breite ε des Streifens kann dabei beliebig gewählt werden.



Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}(c) = c \qquad \lim_{n\to\infty}\left(q^{n-1}\right) = 0 \qquad |q| < 1$$

Grenzwertsätze

Summe. Der Grenzwert einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

Differenz. Der Grenzwert einer Differenz ist gleich der Differenz der Grenzwerte von Minuend und Subtrahend.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Produkt. Der Grenzwert eines Produkts ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Quotient. Der Grenzwert eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte von Zähler und Nenner.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \qquad \text{falls } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Hier wird vorausgesetzt, dass der Grenzwert des Nenners nicht gleich Null ist.