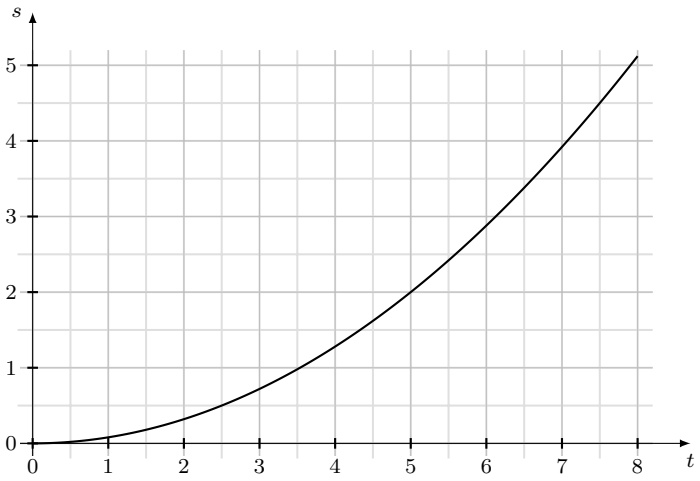
Mittlere Steigung

1. **Weg-Zeit-Diagramm.** Das unten stehende Weg-Zeit-Diagramm stellt den Weg s, den ein Objekt zurückgelegt hat, in Abhängigkeit der Zeit t dar. So hat das Objekt beispielsweise nach fünf Sekunden zwei Meter zurückgelegt.



(a) Wie gross ist die mittlere Geschwindigkeit v in den ersten sechs Sekunden der Bewegung?

Lösung: Aus dem Graphen wird abgelesen, dass nach sechs Sekunden ca. drei Meter zurückgelegt wurden, also:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \tfrac{3}{6} = 0.5$$

Die mittlere Geschwindigkeit in den ersten sechs Sekunden beträgt also etwa $\boxed{0.5\,\text{m/s}}$.

(b) Wie gross sind die mittleren Geschwindigkeiten in den Zeitintervallen $[0, 3]$ und $[3, 6]$?

Lösung: Nach drei Sekunden wurden ca. 0.7 Meter zurückgelegt. Somit beträgt die mittlere Geschwindigkeit während der ersten drei Sekunden

$$v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{0.7}{3} \approx \boxed{0.23\,\text{m/s}}$$

Während der nächsten drei Sekunden beträgt die mittlere Geschwindigkeit

$$v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{3 - 0.7}{6 - 3} = \frac{2.3}{3} \approx \boxed{0.77\,\text{m/s}}$$

(c) Wie gross sind die mittleren Geschwindigkeiten in den folgenden Zeitintervallen?
$[1.25, 6]$ $[2.5, 6]$ $[3.5, 6]$ $[5, 6]$

Lösung: Auf dem Zeitintervall $[1.25, 6]$ beträgt die mittlere Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{3 - 0.1}{6 - 1.25} = \frac{2.9}{4.75} \approx \boxed{0.61\,\text{m/s}}$$

Auf dem Zeitintervall $[2.5, 6]$ beträgt die mittlere Geschwindigkeit

$$v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{3 - 0.5}{6 - 2.5} = \frac{2.5}{3.5} \approx \boxed{0.71\,\mathrm{m/s}}$$

Auf dem Zeitintervall $[3.5, 6]$ beträgt die mittlere Geschwindigkeit

$$v_3 = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{3 - 1}{6 - 3.5} = \frac{2}{2.5} = \boxed{0.8\,\mathrm{m/s}}$$

Auf dem Zeitintervall $[5, 6]$ beträgt die mittlere Geschwindigkeit

$$v_4 = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{3 - 2}{6 - 5} = \frac{1}{1} = \boxed{1\,\mathrm{m/s}}$$

(d) Wie gross ist vermutlich die momentane Geschwindigkeit nach genau sechs Sekunden? Wie könnte diese grafisch bestimmt werden?

Lösung: Wahrscheinlich nahe bei 1 m/s. Sie entspricht der Steigung der Tangente an die Kurve bei sechs Sekunden.

2. Mittlere Änderungsrate. Geben Sie für die angegebenen Funktionen die Definitionsmenge an und berechnen Sie die mittlere Änderungsrate auf den Intervallen $[-2, 0]$ und $[2, 7]$.

(a) $f(x) = x^2 - 1$

Lösung:

$$D = \mathbb{R}$$

$$m_1 = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = \boxed{-2}$$

$$m_2 = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{48 - 3}{5} = \frac{45}{5} = \boxed{9}$$

(b) $f(x) = -x^2 + x + 1$

Lösung:

$$D = \mathbb{R}$$

$$m_1 = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-5)}{0 - (-2)} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$$

$$m_2 = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{-41 - (-1)}{7 - 2} = \frac{-40}{5} = \boxed{-8}$$

(c) $f(x) = 2\sqrt{x + 2}$

Lösung:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$$

$$m_1 = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{0}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$m_2 = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{2\sqrt{9} - 2\sqrt{4}}{7 - 2} = \frac{2 \cdot 3 - 2 \cdot 2}{5} = \boxed{\frac{2}{5}} = \boxed{0.4}$$

(d) $f(x) = \dfrac{6}{x+3}$

Lösung:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$m_1 = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{\frac{6}{3} - \frac{6}{1}}{0 - (-2)} = \frac{2 - 6}{2} = \frac{-4}{2} = \boxed{-2}$$

$$m_2 = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\frac{6}{10} - \frac{6}{5}}{7 - 2} = \frac{0.6 - 1.2}{5} = \frac{-0.6}{5} = \boxed{\frac{-3}{25}} = \boxed{-0.12}$$

3. Kaffeetasse. Die folgende Funktion beschreibt die Temperatur T einer Tasse Kaffee in Grad Celsius in Abhängigkeit der Zeit t in Minuten.

$$T(t) = 75 \cdot 3^{-0.05t} + 20$$

(a) Wie gross ist die mittlere Abkühlungsrate in den Zeitintervallen $[5, 40]$ und $[15, 50]$?

Lösung:

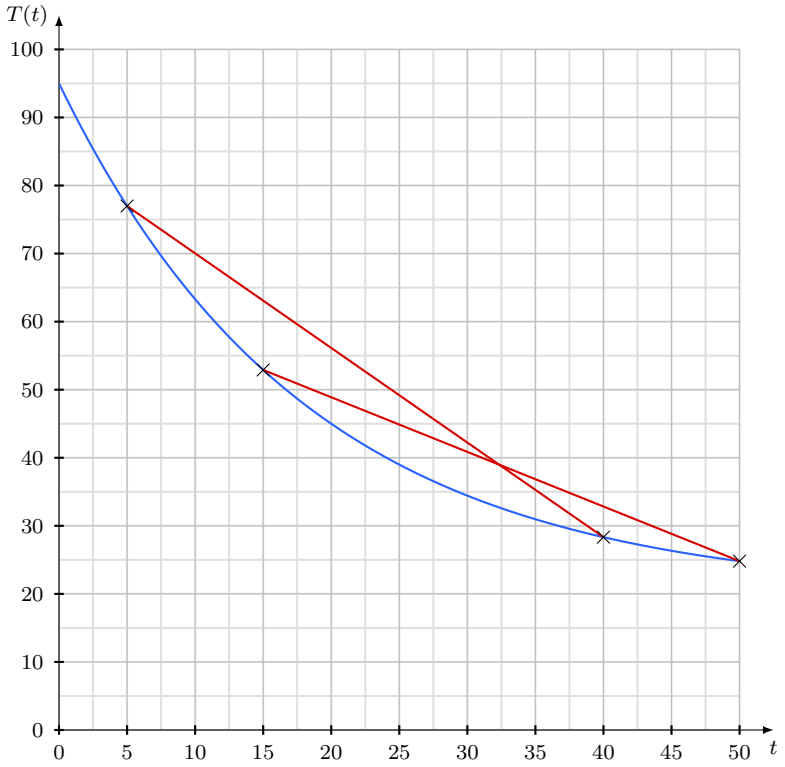
$$m_1 = \frac{T(40) - T(5)}{40 - 5} = \frac{28.333 - 76.988}{35} = \boxed{-1.390\,°\text{C/min}}$$

$$m_2 = \frac{T(50) - T(15)}{50 - 15} = \frac{24.811 - 52.902}{35} = \boxed{-0.803\,°\text{C/min}}$$

(b) Beschreiben Sie in Worten, was diese Werte bedeuten.

Lösung: Im ersten Intervall kühlt der Kaffee im Mittel um 1.39 °C pro Minute ab, im zweiten nur noch um 0.80 °C pro Minute. Die Abkühlung nimmt also mit der Zeit ab.

(c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion sowie die mittleren Abkühlungsraten aus (a) ins untenstehende Koordinatensystem ein.



(d) Woran ist zu erkennen, dass die mittlere Abkühlung auf dem zweiten Intervall kleiner ist?

Lösung: Daran, dass die Steigung der zweiten Strecke weniger negativ ist.