Ableitung

1. **Differenzenquotienten.** Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^2$. Berechnen Sie die folgenden mittleren Steigungen und tragen Sie die entsprechenden Geraden im Diagramm ein.

   (a) $\dfrac{f(2+4)-f(2)}{4}$

   Lösung: Hier ist $a = 2$ und $\Delta x = 4$.

   $$\frac{f(2+4)-f(2)}{4} = \frac{\frac{1}{10}(2+4)^2 - \frac{1}{10}\cdot 2^2}{4} = \frac{\frac{1}{10}\cdot 36 - \frac{1}{10}\cdot 4}{4} = \frac{3.6-0.4}{4} = \frac{3.2}{4} = \boxed{0.8}$$

   (b) $\dfrac{f(2+2)-f(2)}{2}$

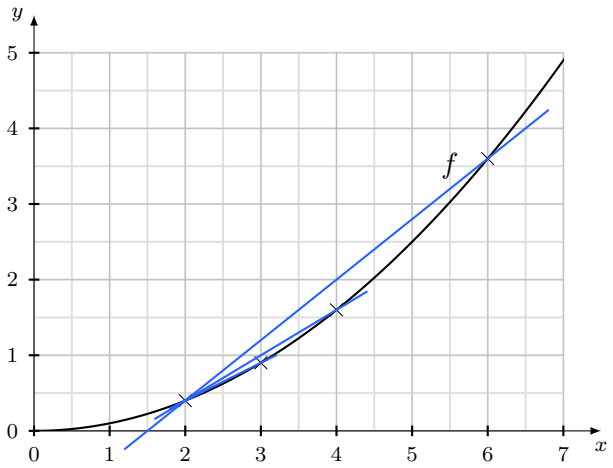
   Lösung: Hier ist $a = 2$ und $\Delta x = 2$.

   $$\frac{f(2+2)-f(2)}{2} = \frac{\frac{1}{10}(2+2)^2 - \frac{1}{10}\cdot 2^2}{2} = \frac{\frac{1}{10}\cdot 16 - \frac{1}{10}\cdot 4}{2} = \frac{1.6-0.4}{2} = \frac{1.2}{2} = \boxed{0.6}$$

   (c) $\dfrac{f(2+1)-f(2)}{1}$

   Lösung: Hier ist $a = 2$ und $\Delta x = 1$.

   $$\frac{f(2+1)-f(2)}{1} = \frac{\frac{1}{10}(2+1)^2 - \frac{1}{10}\cdot 2^2}{1} = \frac{\frac{1}{10}\cdot 9 - \frac{1}{10}\cdot 4}{1} = \frac{0.9-0.4}{1} = \boxed{0.5}$$



2. **Differenzenquotienten.** Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. Berechnen Sie die folgenden Differenzenquotienten:

   (a) $\dfrac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$

Lösung:

$$\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x} = \frac{(4+\Delta x)^2-4^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{4^2}+2\cdot 4\cdot \Delta x+\Delta x^2-\cancel{4^2}}{\Delta x}$$

$$= \frac{8\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(8+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \boxed{8+\Delta x}$$

(b) $\dfrac{f(a+1)-f(a)}{1}$

Lösung:

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{1} = \frac{(a+1)^2-a^2}{1} = (a+1)^2-a^2 = \cancel{a^2}+2\cdot a\cdot 1+1-\cancel{a^2} = \boxed{2a+1}$$

(c) $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

Lösung:

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{a^2}+2\cdot a\cdot\Delta x+\Delta x^2-\cancel{a^2}}{\Delta x}$$

$$= \frac{2a\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(2a+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \boxed{2a+\Delta x}$$

3. **Differenzialquotienten.** Bestimmen Sie die Steigung der Funktion f an der Stelle a mit Hilfe des Differenzialquotienten.

(a) $f(x)=7x-4 \qquad a=5$

Lösung:

$$m = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{7\cdot(5+\Delta x)-4-(7\cdot 5-4)}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{35+7\cdot\Delta x-4-35+4}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\cancel{35}+7\cdot\Delta x-\cancel{4}-\cancel{35}+\cancel{4}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{7\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} 7 = \boxed{7}$$

(b) $f(x)=x^2+1 \qquad a=-1$

Lösung:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{(-1+\Delta x)^2 + 1 - \left((-1)^2+1\right)}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cancel{1} - 2\cdot\Delta x + \Delta x^2 + \cancel{1} - \cancel{2}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cancel{\Delta x}\cdot(-2+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(-2+\Delta x) = \boxed{-2}$$

(c) $f(x) = c \qquad a = 0$

Lösung:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{c-c}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{0}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}(0) = \boxed{0}$$

(d) $f(x) = mx + q \qquad a = 3$

Lösung:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{m\cdot(3+\Delta x) + q - (m\cdot 3 + q)}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cancel{3m} + m\cdot\Delta x + \cancel{q} - \cancel{3m} - \cancel{q}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{m\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(m) = \boxed{m}$$

4. **Ableitungsfunktion.** Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion f mit Hilfe des Differenzialquotienten.

(a) $f(x) = x$

Lösung:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}(1) = \boxed{1}$$

(b) $f(x) = x^2$

Lösung:

$$f'(x) = 2x$$

(c) $f(x) = x^3$

Lösung:

$$f'(x) = 3x^2$$

(d) $f(x) = 3x^2 + 4$

Lösung:

$$f'(x) = 6x$$

(e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Lösung:

$$f'(x) = x$$

(f) $f(x) = \sqrt{x}$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

(g) $f(x) = ax^2 + bx$

Lösung:

$$f'(x) = 2ax + b$$

(h) $f(x) = \frac{c}{x}$

Lösung:

$$f'(x) = c \cdot \left(-x^{-2}\right) = \boxed{\frac{-c}{x^2}}$$

5. **Ableitung.** Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = 3x + 4$

Lösung: $f'(x) = 3$

(b) $f(x) = 12 - 2x$

Lösung: $f'(x) = -2$

(c) $f(x) = x^4$

Lösung: $f'(x) = 4x^3$

(d) $f(x) = x^{10}$

Lösung: $f'(x) = 10x^9$

(e) $f(x) = 3x^5$

Lösung: $f'(x) = 15x^4$

(f) $f(x) = 5x^{12}$

Lösung: $f'(x) = 60x^{11}$

(g) $f(x) = 0.5x^4$

Lösung: $f'(x) = 2x^3$

(h) $f(x) = \frac{1}{9}x^6$

Lösung: $f'(x) = \frac{2}{3}x^5$

(i) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Lösung: $f'(x) = 2x - 3$

(j) $f(x) = -4x^2 + 5x - 1$

Lösung: $f'(x) = -8x + 5$

(k) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x$

Lösung: $f'(x) = 9x^2 + 8x - 5$

(l) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 3$

Lösung: $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 10x$

(m) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 7x - 8$

Lösung: $f'(x) = 6x^2 - 24x + 7$

(n) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 4x^3 - 5x^2$

Lösung: $f'(x) = 2x^3 + 12x^2 - 10x$

(o) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$

Lösung: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

(p) $f(x) = \frac{1}{5}x^{10} + \frac{2}{9}x^6 - \frac{5}{2}x^2$

Lösung: $f'(x) = 2x^9 + \frac{4}{3}x^5 - 5x$

6. **Tangente.** Geben Sie die Funktionsgleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt P mit der x-Koordinate x_0 an.

(a) $f(x) = 3x^2 \qquad x_0 = 1$

Lösung: Diese Aufgabe ist zweiteilig: Gesucht ist eine Gerade mit der Steigung m durch einen Punkt P. Im ersten Teil müssen die Steigung und der Punkt ermittelt werden. Im zweiten Teil wird die Geradengleichung ermittelt. Der zweite Teil ist eine Wiederholung aus dem Thema «Lineare Funktionen» aus GYM1.

1. Ermitteln des Punkts: Der Punkt P, an welchem die Tangente t an den Graphen von f angelegt wird, hat die vorgegebene x-Koordinate $x_0 = 1$. Da der Punkt auf dem Funktionsgraphen liegt, wird die y-Koordinate durch Einsetzen der x-Koordinate in die Funktionsgleichung ermittelt:

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

Der Punkt P hat also die Koordinaten $P(1/3)$.

2. Ermitteln der Steigung: Die Steigung der Funktion f wird durch die Ableitung beschrieben:

$$f'(x) = 2 \cdot 3x = 6x$$

Um die Steigung im Punkt P zu ermitteln, wird die vorgegebene x-Koordinate in die Ableitung eingesetzt:

$$m = f'(1) = 6 \cdot 1 = 6$$

3. Ermitteln der Geradengleichung: Nun muss die Gleichung der Geraden durch den Punkt $P(1/3)$ mit der Steigung $m = 6$ ermittelt werden. Die allgemeine Form der Geradengleichung lautet:

$$t(x) = mx + q$$

Dabei ist m schon bekannt. Um das unbekannte q zu ermitteln, nutzen wir die Bedingung, dass die Gerade durch den Punkt P geht. Das bedeutet, dass die Koordinaten von P die Gleichung erfüllen müssen, also:

$$\begin{array}{rl|l} t(x) = mx + q & & m = 6 \\ t(x) = 6x + q & & x = 1 \text{ und } y = 3 \\ 3 = 6 \cdot 1 + q & & -6 \\ -3 = q & & \end{array}$$

Somit ergibt sich die folgende Gleichung für die Tangente:

$$\boxed{t(x) = 6x - 3}$$

(b) $f(x) = -x^3 \qquad x_0 = 2$

Lösung: $t(x) = -12x + 16$

(c) $f(x) = 4x - x^2 \qquad x_0 = 3$

Lösung: $t(x) = -2x + 9$

(d) $f(x) = x^3 - 9x \qquad x_0 = -2$

Lösung: 1. Punkt ermitteln:

$$f(-2) = (-2)^3 - 9 \cdot (-2) = -8 + 18 = 10$$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(-2/10)$.

2. Steigung ermitteln:

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$
$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 9 = 3 \cdot 4 - 9 = 12 - 9 = 3$$

3. Geradengleichung ermitteln:

$$\begin{array}{l|l} t(x) = mx + q & m = 3 \\ t(x) = 3x + q & x = -2 \text{ und } y = 10 \\ 10 = -2 \cdot 3 + q & +6 \\ 16 = q & \end{array}$$

Somit ergibt sich die folgende Gleichung für die Tangente:

$$\boxed{t(x) = 3x + 16}$$

(e) $f(x) = 7x^3 + 9x^2 - 8 \qquad x_0 = -1$

Lösung: 1. Punkt ermitteln:

$$f(-1) = 7 \cdot (-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 - 8 = -7 + 9 - 8 = -6$$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(-1/-6)$.

2. Steigung ermitteln:

$$f'(x) = 21x^2 + 18x$$
$$f'(-1) = 21 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) = 21 - 18 = 3$$

3. Geradengleichung ermitteln:

$$\begin{array}{l|l} t(x) = mx + q & m = 3 \\ t(x) = 3x + q & x = -1 \text{ und } y = -6 \\ -6 = 3 \cdot (-1) + q & +3 \\ -3 = q & \end{array}$$

Somit ergibt sich die folgende Gleichung für die Tangente:

$$\boxed{t(x) = 3x - 3}$$

(f) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 \qquad x_0 = 3$

Lösung: $t(x) = 12x - 27$

(g) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1 \qquad x_0 = 2$

Lösung: $t(x) = -1$

(h) $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3x^2 \qquad x_0 = 1$

Lösung: 1. Punkt ermitteln:

$$f(1) = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^2 = 2 - 5 + 3 = 0$$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(1/0)$.

2. Steigung ermitteln:

$$f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 6x$$
$$f'(1) = 10 \cdot 1^4 - 20 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 = 10 - 20 + 6 = -4$$

3. Geradengleichung ermitteln:

$$\begin{array}{l|l} t(x) = mx + q & m = -4 \\ t(x) = -4x + q & x = 1 \text{ und } y = 0 \\ 0 = -4 \cdot 1 + q & +4 \\ 4 = q & \end{array}$$

Somit ergibt sich die folgende Gleichung für die Tangente:

$$\boxed{t(x) = -4x + 4}$$