Extrempunkte

1. **MathemaTrick.** Wie lauten die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte der folgenden Funktion? Lösungsvideo

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

Lösung: Zunächst wird die Ableitung der Funktion ermittelt:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

Bei den Extrempunkten ist die Steigung Null. Also wird die erste Ableitung gleich Null gesetzt:

$$6x^2 - 6x = 6x(x-1) = 0$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt ergeben sich die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Dort liegen die Extrempunkte. Nun werden diese noch genau untersucht.

- $x_1 = 0$. Die y-Koordinate an dieser Stelle wird mit der Funktion ermittelt:

  $$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

  Nun werden die Funktionswerte links und rechts von der Stelle ermittelt:

  $$f(-0.1) = 2 \cdot (-0.1)^3 - 3 \cdot (-0.1)^2 + 1 = 0.968$$
  $$f(0.1) = 2 \cdot 0.1^3 - 3 \cdot 0.1^2 + 1 = 0.972$$

  Da die Funktionswerte links und rechts kleiner sind als $f(0) = 1$, handelt es sich um einen Hochpunkt.

  $$\boxed{H(0/1)}$$

- $x_2 = 1$. Die y-Koordinate an dieser Stelle wird mit der Funktion ermittelt:

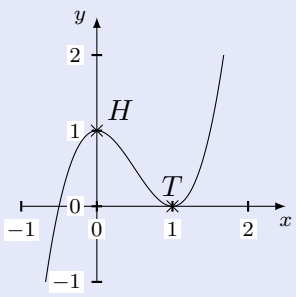
  $$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 0$$

  Nun werden die Funktionswerte links und rechts von der Stelle ermittelt:

  $$f(0.9) = 2 \cdot 0.9^3 - 3 \cdot 0.9^2 + 1 = 0.028$$
  $$f(1.1) = 2 \cdot 1.1^3 - 3 \cdot 1.1^2 + 1 = 0.032$$

  Da die Funktionswerte links und rechts grösser sind als $f(1) = 0$, handelt es sich um einen Tiefpunkt.

  $$\boxed{T(1/0)}$$



2. MathemaTrick. Wie lauten die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte der folgenden Funktion? Lösungsvideo

$$f(x) = \tfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x$$

Lösung: Zunächst werden die erste und zweite Ableitung der Funktion ermittelt:

$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$$
$$f''(x) = 4x + 6$$

Bei den Extrempunkten ist die Steigung Null. Also wird die erste Ableitung gleich Null gesetzt:

$$2x^2 + 6x + 4 = 0$$

Die Lösungen werden mit der Lösungsformel ermittelt:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{4} = -1.5 \pm 0.5$$

Also liegen die Extrempunkte an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = -1$. Nun werden diese noch genau untersucht.

- $x_1 = -2$. Die Krümmung der Kurve an dieser Stelle wird mit der zweiten Ableitung ermittelt:

  $$f''(-2) = 4 \cdot (-2) + 6 = -2$$

  Die Krümmung ist negativ, es handelt sich also um einen Hochpunkt. Nun wird noch die y-Koordinate des Punkts ermittelt:

  $$f(-2) = \tfrac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = \tfrac{-16}{3} + 12 - 8 = \tfrac{-4}{3}$$

  Der erste Extrempunkt ist also der Hochpunkt $\boxed{H\left(-2/\tfrac{-4}{3}\right)}$.

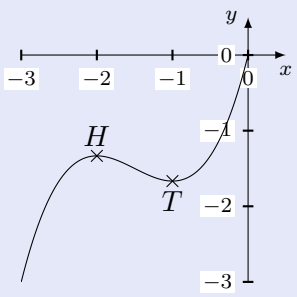
- $x_2 = -1$. Die Krümmung der Kurve an dieser Stelle ist:

  $$f''(-1) = 4 \cdot (-1) + 6 = 2$$

  Die Krümmung ist positiv, es handelt sich also um einen Tiefpunkt. Die y-Koordinate des Punkts ist:

  $$f(-1) = \tfrac{2}{3} \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = \tfrac{-2}{3} + 3 - 4 = \tfrac{-5}{3}$$

  Der zweite Extrempunkt ist der Tiefpunkt $\boxed{T\left(-1/\tfrac{-5}{3}\right)}$.



3. MathemaTrick. Wie lauten die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte der folgenden Funktion? Lösungsvideo

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - \tfrac{16}{3}$$

Lösung: Zunächst werden die erste und zweite Ableitung der Funktion ermittelt:

$$f'(x) = x^2 - 6x + 8$$
$$f''(x) = 2x - 6$$

Bei den Extrempunkten ist die Steigung Null. Also wird die erste Ableitung gleich Null gesetzt:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Die Lösungen werden mit der Lösungsformel ermittelt:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = 3 \pm 1$$

Also liegen die Extrempunkte an den Stellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$. Nun werden diese noch genau untersucht.

- $x_1 = 2$. Die Krümmung der Kurve an dieser Stelle wird mit der zweiten Ableitung ermittelt:

  $$f''(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$$

  Die Krümmung ist negativ, es handelt sich also um einen Hochpunkt. Nun wird noch die y-Koordinate des Punkts ermittelt:

  $$f(2) = \tfrac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - \tfrac{16}{3} = \tfrac{8}{3} - 12 + 16 - \tfrac{16}{3} = 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}$$

  Der erste Extrempunkt ist also der Hochpunkt $\boxed{H\left(2/\tfrac{4}{3}\right)}$.

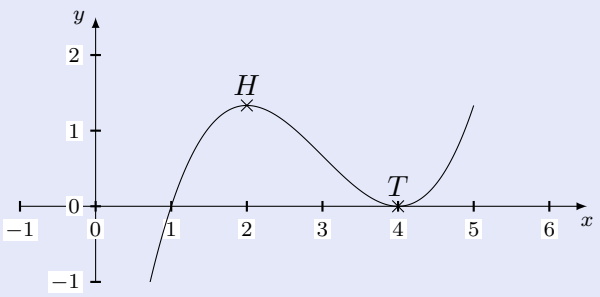
- $x_2 = 4$. Die Krümmung der Kurve an dieser Stelle ist:

  $$f''(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

  Die Krümmung ist positiv, es handelt sich also um einen Tiefpunkt. Die y-Koordinate des Punkts ist:

  $$f(4) = \tfrac{1}{3} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 - \tfrac{16}{3} = \tfrac{64}{3} - 48 + 32 - \tfrac{16}{3} = \tfrac{48}{3} - 16 = 0$$

  Der zweite Extrempunkt ist der Tiefpunkt $\boxed{T(4/0)}$.



4. Kugel. Eine Kugel wird aus Bodenhöhe schräg nach oben geworfen. Die Wurfbahn kann durch die Funktion h dargestellt werden. Dabei ist x die horizontale Entfernung in Meter, h die Höhe in Meter.

$$h(x) = -0.025x^2 + x$$

(a) Wo befindet sich der höchste Punkt der Bahn?

Lösung: Zunächst wird die Ableitung bestimmt:

$$h'(x) = -0.05x + 1$$

Der Hochpunkt liegt an einer Stelle, an der die Steigung Null ist. Also wird die Ableitung Null gesetzt:

$$\begin{array}{rl|l} 0 = -0.05x + 1 & & +0.05x \\ 0.05x = 1 & & \cdot 20 \\ x = 20 & & \end{array}$$

Die y-Koordinate des Punkts wird durch Einsetzen der x-Koordinate in den Funktionsterm bestimmt:

$$h(20) = -0.025 \cdot 20^2 + 20 = 10$$

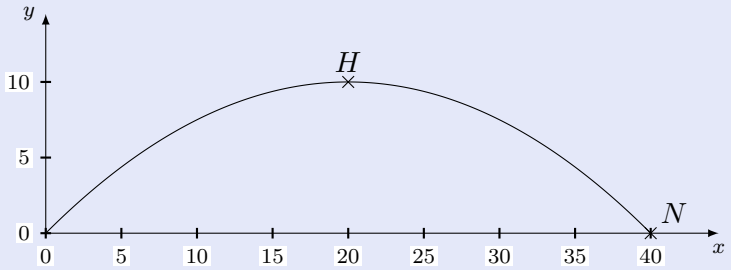
Also liegt der höchste Punkt der Bahn bei $\boxed{H(20/10)}$.

(b) In welcher Entfernung trifft die Kugel auf den Boden, wenn das Gelände horizontal ist?

Lösung: Gesucht werden die Punkte, welche eine y-Koordinate von Null haben, also wo der Funktionsterm Null ergibt:

$$\begin{array}{rl|l} 0 = -0.025x^2 + x & & \text{ausklammern} \\ 0 = x \cdot (-0.025x + 1) & & \end{array}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt ergeben sich die Lösungen $x = 0$ und $x = 40$. Da $x = 0$ der Ausgangspunkt ist, trifft die Kugel im Punkt $\boxed{N(40/0)}$ auf den Boden.



(c) In welchem Winkel trifft die Kugel auf den Boden?

Lösung: Der Winkel entspricht dem Steigungswinkel der Tangente an die Wurfbahn bei $x = 40$. Die Steigung ergibt sich aus der Ableitung:

$$h'(40) = -0.05 \cdot 40 + 1 = -1$$

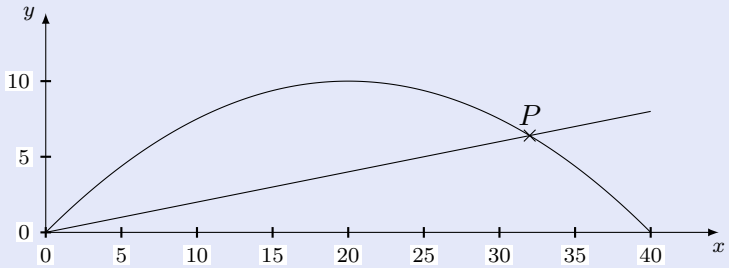
Die Steigung ist auch der Tangens des Steigungswinkels, also

$$\varphi = \arctan(-1) = -45°$$

Die Kugel trifft also in einem Winkel von $\boxed{45°}$ zur Horizontalen auf den Boden.

(d) In welcher Entfernung und in welchem Winkel trifft die Kugel auf den Boden, wenn sie einen 20 % ansteigenden Hang hinaufgeworfen wird?

Lösung: Der Hang kann durch die lineare Funktion $g(x) = 0.2x$ beschrieben werden. Es wird der Punkt gesucht, in welchem sich die beiden Funktionen g und h schneiden.



Dazu werden die Funktionsterme gleich gesetzt:

$h(x) = g(x)$	einsetzen
$-0.025x^2 + x = 0.2x$	$-\,0.2x$
$-0.025x^2 + 0.8x = 0$	$\cdot\,(-40)$
$x^2 - 32x = 0$	ausklammern
$x(x - 32) = 0$	

Mit dem Satz vom Nullprodukt ergeben sich die Lösungen $x = 0$ und $x = 32$. Da $x = 0$ der Ausgangspunkt ist, trifft die Kugel an der Stelle $x = 32$ auf den Hang. Nur die y-Koordinate muss noch bestimmt werden:

$$g(32) = 0.2 \cdot 32 = 6.4$$

Die Kugel trifft im Punkt $\boxed{P(32/6.4)}$ auf den Boden.

Die Steigung der Wurfbahn beträgt dort:

$$h'(32) = -0.05 \cdot 32 + 1 = -0.6$$

Der Steigungswinkel beträgt somit

$$\alpha = \arctan(-0.6) \approx -30.9638°$$

Der Steigungswinkel des Hangs beträgt

$$\beta = \arctan(0.2) \approx 11.3099°$$

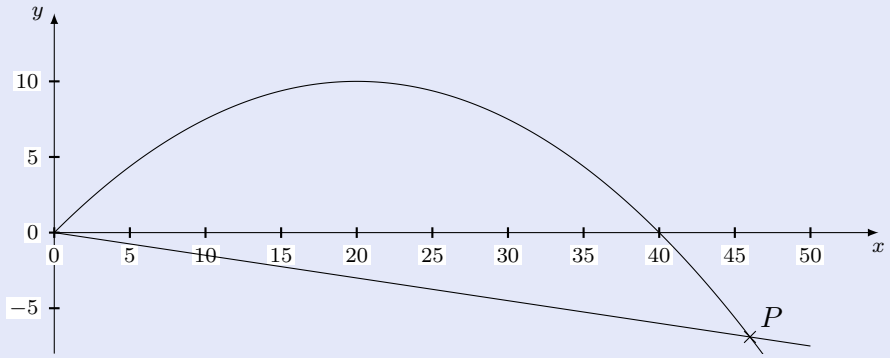
Somit ergibt sich der Winkel, in dem die Kugel auf den Boden trifft:

$$\varphi \approx \alpha - \beta = -42.2737°$$

Die Kugel trifft also in einem Winkel von $\boxed{42.2737°}$ auf den Hang.

(e) In welcher Entfernung und in welchem Winkel trifft die Kugel auf den Boden, wenn sie einen 15 % abfallenden Hang hinuntergeworfen wird?

Lösung: Der Hang wird durch die lineare Funktion $f(x) = -0.15x$ beschrieben. Es wird der Punkt gesucht, in welchem sich die beiden Funktionen f und h schneiden.



$h(x) = f(x)$	einsetzen
$-0.025x^2 + x = -0.15x$	$+ 0.15x$
$-0.025x^2 + 1.15x = 0$	$\cdot (-40)$
$x^2 - 46x = 0$	ausklammern
$x(x - 46) = 0$	

Mit dem Satz vom Nullprodukt ergeben sich die Lösungen $x = 0$ und $x = 46$. Da $x = 0$ der Ausgangspunkt ist, trifft die Kugel an der Stelle $x = 46$ auf den Hang. Nur die y-Koordinate muss noch bestimmt werden:

$$f(46) = -0.15 \cdot 46 = -6.9$$

Die Kugel trifft im Punkt $\boxed{P(46/-6.9)}$ auf den Boden.

Die Steigung der Wurfbahn beträgt dort:

$$h'(46) = -0.05 \cdot 46 + 1 = -1.3$$

Der Steigungswinkel beträgt somit

$$\alpha = \arctan(-1.3) \approx -52.4314°$$

Der Steigungswinkel des Hangs beträgt

$$\beta = \arctan(-0.15) \approx -8.5308°$$

Somit ergibt sich der Winkel, in dem die Kugel auf den Boden trifft:

$$\varphi \approx \alpha - \beta = -43.9006°$$

Die Kugel trifft also in einem Winkel von $\boxed{43.9006°}$ auf den Hang.

5. Kugelstossen. Beim Kugelstossen beschreibt die Kugel annähernd eine Parabel. Bei ei-

nem bestimmten Wurf kann diese Parabel durch die Funktion h beschrieben werden.

$$h(x) = -0.05x^2 + 0.7x + 1.6$$

(a) In welcher Höhe wird die Kugel abgestossen?

Lösung: 1.6 m

(b) Wie gross ist die durchschnittliche Steigung der Flugbahn im Intervall $[2, 6]$?

Lösung: 0.3

(c) Wie lauten die Koordinaten des höchsten Punkts der Bahn?

Lösung: $H(7/4.05)$

(d) In welcher Entfernung und in welchem Winkel trifft die Kugel auf den Boden?

Lösung: In einer Entfernung von 16 m und einem Winkel von 42.0°.

6. Fussball. Ein Fussballspieler spielt einen langen Pass. Wenn man den Luftwiderstand berücksichtigt, kann die Bahn des Balls durch die Funktion h angenähert werden.

$$h(x) = -0.0006x^3 - 0.007x^2 + 0.75x$$

(a) In welcher Entfernung und in welchem Winkel trifft der Ball auf den Boden?

Lösung: In einer Entfernung von 30 m und einem Winkel von 52.2°.

(b) Wie lauten die Koordinaten des höchsten Punkts der Bahn?

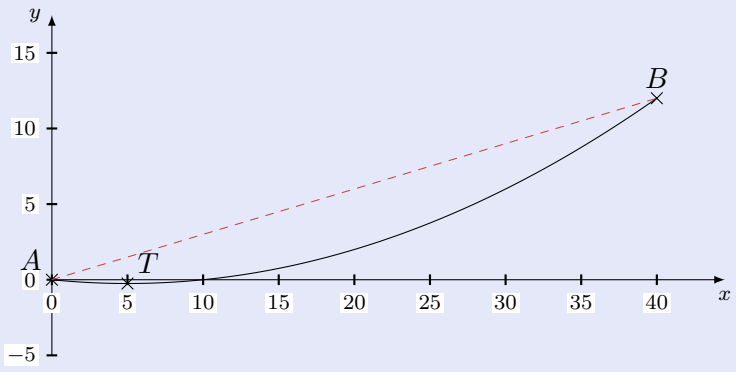
Lösung: $H(16.9/7.8)$

7. Seil. Ein Seil überspannt einen 40 m breiten Graben bei einer Höhendifferenz von 12 m. Die Form des Seils entspricht näherungsweise dem Graphen von f zwischen den Punkten $A(0/0)$ und $B(40/12)$.

$$f(x) = 0.01x^2 - 0.1x$$

(a) Wie gross sind die Neigungswinkel des Seils an den Endpunkten A und B?

Lösung:



Bei Punkt A beträgt der Neigungswinkel $\boxed{-5.7106°}$ und bei Punkt B $\boxed{34.9920°}$.

(b) Wie lauten die Koordinaten des tiefsten Punkts des Seils?

Lösung: Gesucht ist der Extrempunkt, also der Punkt mit $f'(x) = 0$. Die Ableitung lautet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.02x - 0.1 \\ 0 &= 0.02x - 0.1 \\ 0.1 &= 0.02x \\ 5 &= x \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ +0.1 \\ \cdot 50 \end{array} \right.$$

Der Extrempunkt hat also die x-Koordinate 5. Ist es ein Tiefpunkt?

$$f''(x) = 0.02$$

Die zweite Ableitung, also die Krümmung, ist immer positiv, somit ist es ein Tiefpunkt. Nun wird nur noch die y-Koordinate benötigt:

$$f(5) = 0.01 \cdot 5^2 - 0.1 \cdot 5 = 0.25 - 0.5 = -0.25$$

Der tiefste Punkt liegt bei $\boxed{T(5/-0.25)}$.

(c) In welchem Punkt verläuft das Seil parallel zur Geraden AB? Gib die Gleichung der Tangente an und berechne den Durchhang des Seils, d.h. den vertikalen Abstand zwischen der Tangente und der Geraden AB.

Lösung: Zunächst wird mit dem Differenzenquotienten die Steigung der Geraden AB ermittelt.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{12 - 0}{40 - 0} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0.3$$

Nun wird die Stelle gesucht, an welcher der Graph der Funktion diese Steigung hat, also

$$\begin{aligned} f'(x) = 0.02x - 0.1 &= 0.3 \\ 2x - 10 &= 30 \\ 2x &= 40 \\ x &= 20 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 100 \\ +10 \\ :2 \end{array} \right.$$

Es wird die y-Koordinate an dieser Stelle ermittelt:

$$f(20) = 0.01 \cdot 20^2 - 0.1 \cdot 20 = 4 - 2 = 2$$

Der gesuchte Punkt lautet also $\boxed{P(20/2)}$. Nun wird die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt gesucht. Die Steigung $m = 0.3$ ist bekannt und die Tangente muss durch den Punkt P verlaufen. Also werden die Koordinaten von P in die Gleichung eingesetzt und nach q aufgelöst:

$$\begin{aligned} t(x) &= 0.3x + q \\ 2 &= 0.3 \cdot 20 + q \\ 2 &= 6 + q \\ -4 &= q \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} P(20/2) \text{ einsetzen} \\ \text{ausrechnen} \\ -6 \end{array} \right.$$

Die Gleichung der Tangente lautet also:

$$t(x) = 0.3x - 4$$

Da die Gerade AB durch den Nullpunkt verläuft und die Tangente bei $x = 0$ die y-Koordinate -4 hat, beträgt der vertikale Abstand 4.

Der Durchhang beträgt 4 m.

8. Geschwindigkeit. Der Weg eines Autos beim Anfahren ist durch die folgende Funktion gegeben:

$$s(t) = 1.5t^2$$

(a) Wie gross ist die Beschleunigung?

Lösung: 3 m/s^2

(b) Wie lange benötigt das Auto, um 60 m zurückzulegen?

Lösung: 6.32 s

(c) Welche Geschwindigkeit hat das Auto nach 60 m?

Lösung: 18.97 m/s

9. Geschwindigkeit. Der Weg eines Autos beim Bremsen wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$$s(t) = -2t^2 + 20t$$

(a) Wie gross ist die Bremsverzögerung (d.h. die negative Beschleunigung)?

Lösung: 4 m/s^2

(b) Wie lange benötigt das Auto bis zum Stillstand?

Lösung: 5 s

(c) Wie lang ist der Bremsweg?

Lösung: 50 m

10. Geschwindigkeit. Ein Ball wird von einem 45 m hohen Turm fallengelassen. Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands wird die Höhe des Balls durch die Funktion $h(t) = -5t^2+45$ beschrieben.

(a) Wie lange benötigt der Ball, um hinunterzufallen?

Lösung: 3 s

(b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Ball auf den Boden?

Lösung: 30 m/s