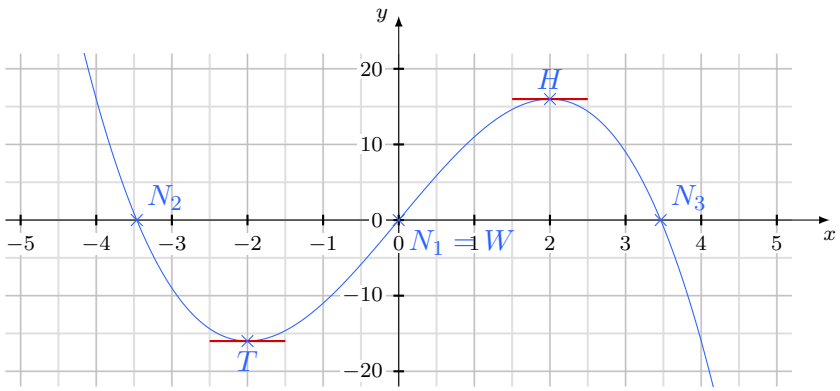
Kurvendiskussion

1. Führe eine Kurvendiskussion der folgenden Funktion durch. Zeichne die wichtigen Punkte und den Graphen der Funktion in das Koordinatensystem ein.

$$f(x) = -x^3 + 12x$$



Lösung: Die Funktion und die Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 12x \\ f'(x) &= -3x^2 + 12 \\ f''(x) &= -6x \end{aligned}$$

Nullpunkte: $f(x) = 0$. Da es sich um eine Gleichung 3. Grades handelt, darf hier nicht direkt die Lösungsformel angewendet werden. Zunächst wird x ausgeklammert:

$$0 = -x^3 + 12x = x\left(-x^2 + 12\right)$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gibt es folgende Fälle:

- $x = 0$: Hier ergibt sich sofort die Lösung $x_1 = 0$.
- $-x^2 + 12 = 0$: Hier muss die quadratische Gleichung gelöst werden, z.B. so:

$$\begin{aligned} -x^2 + 12 &= 0 \quad \mid + x^2 \\ 12 &= x^2 \quad \mid \sqrt{\ } \\ \pm\sqrt{12} &= x \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die drei Lösungen:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{12} \approx 3.464 \qquad x_3 = -\sqrt{12} \approx -3.464$$

Die Nullpunkte lauten also ungefähr:

$$\boxed{N_1(0/0)} \qquad \boxed{N_2(-3.464/0)} \qquad \boxed{N_3(3.464/0)}$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} -3x^2 + 12 &= 0 \quad &| + 3x^2 \\ 12 &= 3x^2 \quad &| : 3 \\ 4 &= x^2 \quad &| \sqrt{\ } \\ \pm 2 &= x \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte bestimmen durch Einsetzen in zweite Ableitung $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(-2) &= -6 \cdot (-2) = 12 > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Tiefpunkt} \\ f''(2) &= -6 \cdot 2 = -12 < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Hochpunkt} \end{aligned}$$

y-Koordinaten der Extrempunkte bestimmen durch Einsetzen in Funktionsgleichung $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -(-2)^3 + 12 \cdot (-2) = -(-8) - 24 = -16 \\ f(2) &= -2^3 + 12 \cdot 2 = -8 + 24 = 16 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die folgenden Extrempunkte:

$$\boxed{T(-2/-16)} \qquad \boxed{H(2/16)}$$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$-6x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0$$

Die y-Koordinate wird ermittelt:

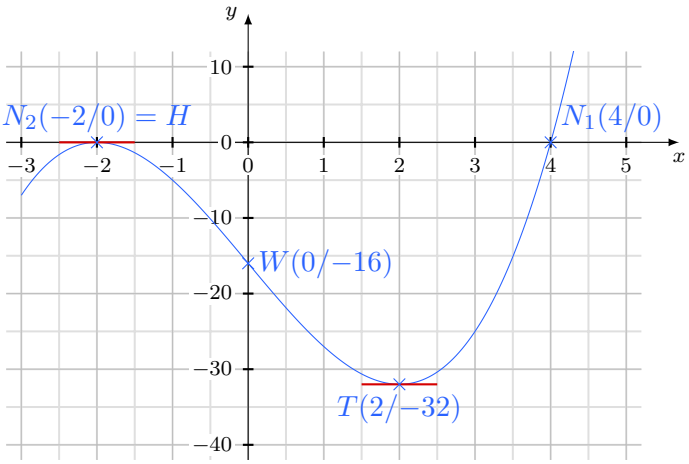
$$f(0) = -0^3 + 12 \cdot 0 = 0$$

Damit ergibt sich der folgende Wendepunkt:

$$\boxed{W(0/0)}$$

2. Führe eine Kurvendiskussion der folgenden Funktion durch. Zeichne die wichtigen Punkte und den Graphen der Funktion in das Koordinatensystem ein.

$$f(x) = x^3 - 12x - 16 = (x - 4)(x + 2)^2$$



Lösung: Die Funktion und die Ableitungen lauten:

$$f(x) = x^3 - 12x - 16$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12$$
$$f''(x) = 6x$$

Nullpunkte: $f(x) = 0$

$$0 = (x-4)(x+2)^2$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gibt es folgende Fälle:

- $x - 4 = 0$: Hier ergibt sich die Lösung $x_1 = 4$.
- $(x+2)^2 = 0$: Hier ergibt sich die Lösung $x_2 = -2$.

Damit ergeben sich zwei Nullstellen:

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -2$$

Die Nullpunkte lauten also:

$$\boxed{N_1(4/0)} \qquad \boxed{N_2(-2/0)}$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12 &= 0 && \mid : 3 \\ x^2 - 4 &= 0 && \mid + 4 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{\ } \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte bestimmen durch Einsetzen in zweite Ableitung $f''(x)$:

$$f''(-2) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$
$$f''(2) = 6 \cdot 2 = 12 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

y-Koordinaten der Extrempunkte bestimmen durch Einsetzen in Funktionsgleichung $f(x)$. Da $x = -2$ auch ein Nullpunkt ist, ist dort die y-Koordinate bereits bekannt.

$$f(-2) = 0$$
$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 - 16 = 8 - 24 - 16 = -32$$

Die Extrempunkte lauten also:

$\boxed{H(-2/0)}$ $\boxed{T(2/-32)}$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$6x = 0$$

Der Wendepunkt liegt bei $x = 0$. Die y-Koordinate lautet:

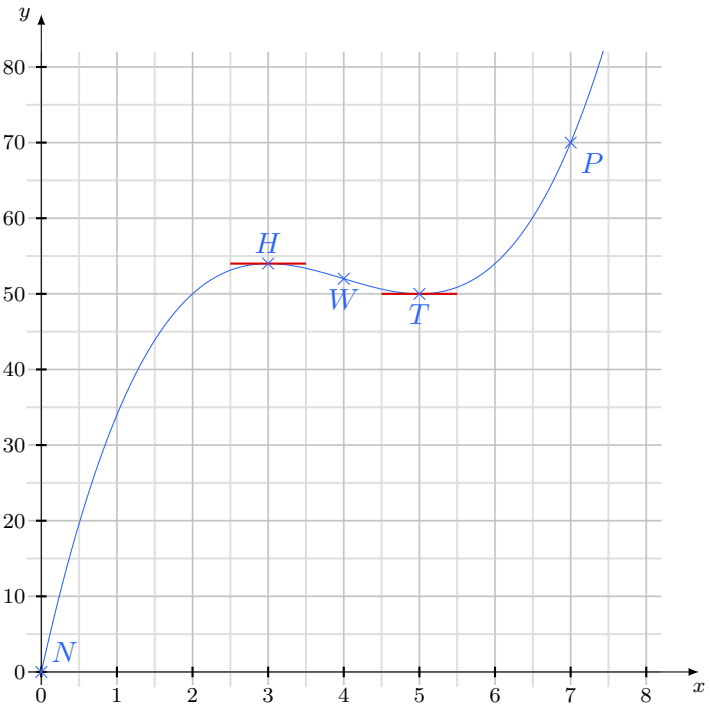
$$f(0) = 0^3 - 12 \cdot 0 - 16 = -16$$

Der Wendepunkt lautet:

$\boxed{W(0/-16)}$

3. Führe eine Kurvendiskussion der folgenden Funktion durch. Zeichne die wichtigen Punkte und den Graphen der Funktion in das Koordinatensystem ein.

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$$



Lösung: Die Funktion und die Ableitungen lauten:

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$$
$$f''(x) = 6x - 24$$

Nullpunkte: $f(x) = 0$

$$x^3 - 12x^2 + 45x = x\left(x^2 - 12x + 45\right) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gibt es folgende Fälle:

- $x = 0$: Hier ergibt sich sofort die Lösung $x_1 = 0$.
- $x^2 - 12x + 45 = 0$: Hier muss die quadratische Gleichung gelöst werden, z.B. mit der Lösungsformel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

  Wegen der negativen Diskriminante unter der Wurzel gibt es keine Lösungen.

Somit ist der einzige Nullpunkt

$$\boxed{N(0/0)}$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 24x + 45 = 0$$

Mit der Lösungsformel ergibt sich:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 45}}{2 \cdot 3} = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{6} = 4 \pm 1$$

Art der Extrempunkte bestimmen durch Einsetzen in zweite Ableitung $f''(x)$:

$$f''(3) = 18 - 24 = -6 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$
$$f''(5) = 30 - 24 = 6 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$

y-Koordinaten der Extrempunkte bestimmen durch Einsetzen in Funktionsgleichung $f(x)$.

$$f(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 = 54$$
$$f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 45 \cdot 5 = 50$$

Die Extrempunkte lauten also:

$$\boxed{H(3/54)} \qquad \boxed{T(5/50)}$$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$6x - 24 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 4$$

Berechnung der y-Koordinate:

$$f(4) = 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 45 \cdot 4 = 52 \quad \Longrightarrow \quad \text{Wendepunkt } \boxed{W(4/52)}$$

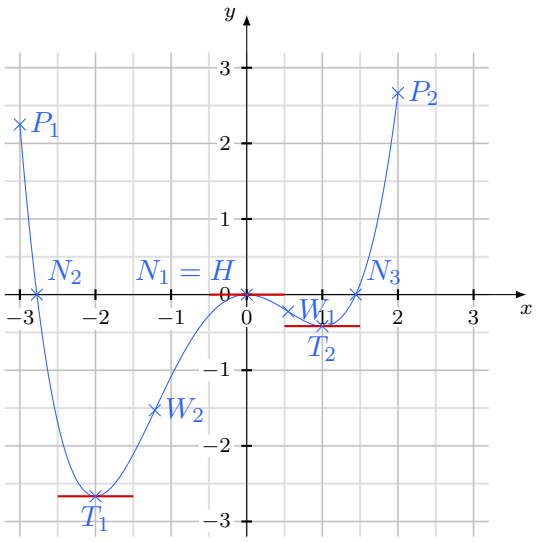
Hilfspunkte: Berechnung eines Hilfspunkts bei $x = 7$:

$$f(7) = 7^3 - 12 \cdot 7^2 + 45 \cdot 7 = 70 \quad \Longrightarrow \quad \text{Hilfspunkt } \boxed{P(7/70)}$$

4. Führe eine Kurvendiskussion der folgenden Funktion durch. Zeichne die wichtigen Punkte

und den Graphen der Funktion in das Koordinatensystem ein.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$



Lösung: Die Ableitungen lauten:

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

Nullpunkte: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0 \quad \Big| \cdot 12$$

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = 0 \quad \Big| \; x^2 \text{ ausklammern}$$

$$x^2\left(3x^2 + 4x - 12\right) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gibt es folgende Fälle:

- $x^2 = 0$: Hier ergibt sich sofort die Lösung $x_1 = 0$.
- $3x^2 + 4x - 12 = 0$: Hier muss die quadratische Gleichung gelöst werden, z.B. mit der Lösungsformel:

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{160}}{6}$$

  Damit ergeben sich die Nullstellen:

  $$x_2 \approx -2.775 \qquad x_3 \approx 1.442$$

Die Nullpunkte lauten also ungefähr:

$\boxed{N_1(0/0)}$ $\boxed{N_2(-2.775/0)}$ $\boxed{N_3(1.442/0)}$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x\left(x^2 + x - 2\right) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gibt es folgende Fälle:

- $x = 0$: Hier ergibt sich sofort die Lösung $x_1 = 0$.
- $x^2 + x - 2 = 0$: Hier muss die quadratische Gleichung gelöst werden, z.B. mit der Lösungsformel oder dem Zweiklammeransatz:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

Die x-Koordinaten der Extrempunkte lauten also:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 1$$

Art der Extrempunkte bestimmen durch Einsetzen in zweite Ableitung $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(0) &= -2 < 0 && \Longrightarrow \text{ Hochpunkt} \\ f''(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 2 = 3 \cdot 4 - 4 - 2 = 6 > 0 && \Longrightarrow \text{ Tiefpunkt} \\ f''(1) &= 3 + 2 - 2 = 3 > 0 && \Longrightarrow \text{ Tiefpunkt} \end{aligned}$$

y-Koordinaten der Extrempunkte bestimmen durch Einsetzen in Funktionsgleichung $f(x)$. Bei $x = 0$ liegt ein Nullpunkt, dort ist also die y-Koordinate bereits bekannt.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(-2) &= \tfrac{1}{4} \cdot (-2)^4 + \tfrac{1}{3} \cdot (-2)^3 - (-2)^2 = \tfrac{1}{4} \cdot 16 - \tfrac{1}{3} \cdot 8 - 4 = \tfrac{-8}{3} \approx -2.667 \\ f(1) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - 1 = \tfrac{3}{12} + \tfrac{4}{12} - \tfrac{12}{12} = \tfrac{-5}{12} \approx -0.4167 \end{aligned}$$

Die Extrempunkte lauten:

$$\boxed{H(0/0)} \qquad \boxed{T_1(-2/-2.667)} \qquad \boxed{T_2(1/-0.4167)}$$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$3x^2 + 2x - 2 = 0$$

Die Lösungen werden mit der Lösungsformel bestimmt:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{6}$$

Dies ergibt die folgenden x-Koordinaten:

$$x_1 \approx 0.5486 \qquad x_2 \approx -1.215$$

Berechnung der y-Koordinaten:

$$\begin{aligned} f(0.5486) &\approx -0.2233 \\ f(-1.21525) &\approx -1.530 \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Wendepunkte lauten also ungefähr:

$$\boxed{W_1(0.5486/-0.2233)} \qquad \boxed{W_2(-1.215/-1.530)}$$

Hilfspunkte: Um den Graphen gut zeichnen zu können, werden noch Hilfspunkte bei $x = -3$ und $x = 2$ berechnet:

$$x = -3 \qquad f(-3) = \tfrac{9}{4} = 2.25$$

$$x = 2 \qquad f(2) = \tfrac{8}{3} \approx 2.667$$

Die Koordinaten der Hilfspunkte lauten:

$$\boxed{P_1(-3/2.25)} \qquad \boxed{P_2(2/2.667)}$$