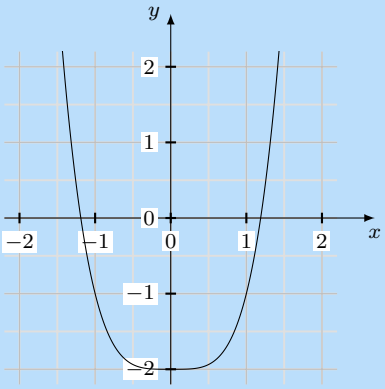
Anwendungen

1. **Sonderfälle.** Bestimmen Sie die Punkte mit Steigung Null der folgenden Funktionen. Geben Sie bei jedem Punkt an, um was für eine Art Punkt (Hochpunkt, Tiefpunkt, Terrassenpunkt) es sich handelt.

   (a) $f(x) = x^4 - 2$

   Lösung:

   Zunächst werden die Ableitungen bestimmt:

   $$f'(x) = 4x^3$$
   $$f''(x) = 12x^2$$

   Die erste Ableitung wird Null gesetzt:

   $$f'(x) = 0 = 4x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0$$

   Bei $x = 0$ liegt ein Punkt mit horizontaler Tangente. Die zweite Ableitung an dieser Stelle ist

   $$f''(0) = 0$$

   Da die Krümmung auch Null ist, müssen Punkte in der Nähe betrachtet werden, um die Art des Punktes zu bestimmen:

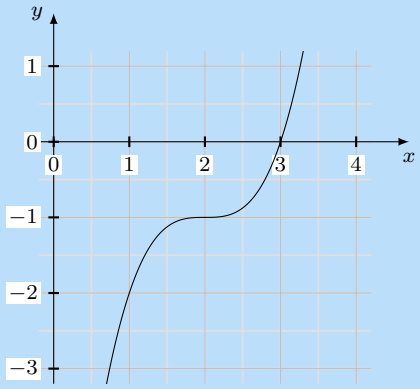
   $$f(-0.1) = (-0.1)^4 - 2 = -1.9999$$
   $$f(0) = 0^4 - 2 = -2$$
   $$f(0.1) = 0.1^4 - 2 = -1.9999$$

   Die Punkte links und rechts liegen höher, also handelt es sich um einen Tiefpunkt:

   $$\boxed{T(0/-2)}$$

   (b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$

Lösung:



$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2$$
$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 12 = 0$$

Die zweite Ableitung ist ebenfalls gleich Null, also müssen Punkte in der Nähe untersucht werden:

$$f(1.9) = -1.001$$
$$f(2) = -1$$
$$f(2.1) = -0.999$$

Es handelt sich somit um einen Terrassenpunkt $\boxed{R(2/-1)}$.

2. **Schnur.** Aus einer 20 cm langen Schnur soll ein Rechteck mit möglichst grosser Fläche geformt werden. Welche Länge und Breite muss es haben?

Lösung: Die Länge und Breite werden mit x und y bezeichnet. Für den Umfang gilt:

$$20 = 2x + 2y \qquad \Longrightarrow \qquad y = 10 - x$$

Damit kann die Fläche in Abhängigkeit von x ausgedrückt werden:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$$

Die Ableitungen lauten:

$$A'(x) = 10 - 2x \qquad\qquad A''(x) = -2$$

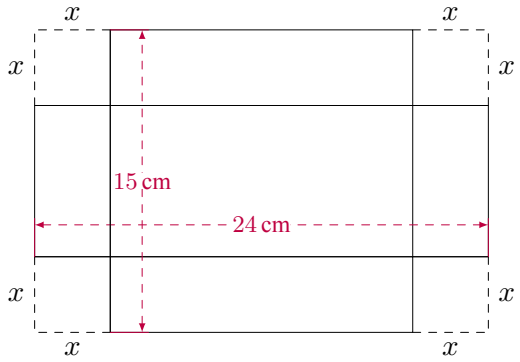
Die Ableitung wird Null gesetzt:

$$0 = 10 - 2x \qquad \Longrightarrow \qquad x = 5$$

Die Stelle ist ein Hochpunkt, da die zweite Ableitung immer negativ ist.

Die Fläche wird am grössten, wenn ein Quadrat geformt wird, also wenn Länge und Breite beide $\boxed{5\,\text{cm}}$ betragen.

3. **Schachtel.** Von einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen 15 cm und 24 cm wird an jeder Ecke ein Quadrat mit der Seitenlänge x weggeschnitten. Durch Auffalten der vorstehenden Rechtecke lässt sich aus dem Reststück eine oben offene Schachtel bilden. Für welches x ist deren Volumen maximal?



Lösung: Zunächst muss eine Formel für das Volumen aufgestellt werden. Das Volumen eines Quaders ist Länge mal Breite mal Höhe, also:

$$\begin{aligned} V(x) &= (24-2x)\cdot(15-2x)\cdot x = (24-2x)\cdot\left(15x-2x^2\right) \\ &= 360x - 48x^2 - 30x^2 + 4x^3 = 4x^3 - 78x^2 + 360x \end{aligned}$$

Von dieser Funktion muss ein Hochpunkt gefunden werden. Also wird abgeleitet:

$$V'(x) = 12x^2 - 156x + 360 \qquad V''(x) = 24x - 156$$

Die Ableitung wird Null gesetzt:

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 156x + 360 && \mid\ V'(x) = 0 \\ 0 &= 12x^2 - 156x + 360 && \mid\ :12 \\ 0 &= x^2 - 13x + 30 && \mid\ \text{Zweiklammeransatz} \\ 0 &= (x-10)(x-3) \end{aligned}$$

Mit dem Zweiklammeransatz werden die Lösungen $x_1 = 10$ und $x_2 = 3$ gefunden. Nun wird mit der zweiten Ableitung überprüft, ob eine dieser Lösungen ein Hochpunkt ist.

$$\begin{aligned} V''(3) &= 24\cdot 3 - 156 = -84 \\ V''(10) &= 24\cdot 10 - 156 = 84 \end{aligned}$$

Für $x = 3$ ist die zweite Ableitung negativ, dies ist also ein Hochpunkt.

Für $\boxed{x = 3\,\text{cm}}$ ist das Volumen maximal.

4. **Gewinnmaximierung.** Eine Firma verkauft ein Produkt zu einem Preis von 30 Franken. Pro Monat verkauft die Firma etwa 4000 Stück. Eine Marktabklärung hat ergeben, dass für jede Senkung des Preises um einen Franken 200 Stück pro Monat mehr verkauft werden könnten.

   Wie muss der Preis festgelegt werden, damit der Ertrag möglichst hoch ist? Wie hoch ist in diesem Fall der Ertrag?

Lösung: Der Ertrag muss maximiert werden. Er berechnet sich aus Anzahl verkaufte Bauteile n mal der Preis x.

$$E(x) = nx$$

Der Preis wird gesucht und mit x bezeichnet. Die Anzahl der verkauften Stück nehmen um 100 zu für je zwei Franken, um den der Preis kleiner als 30 ist, also

$$n = 4000 + 200(30 - x)$$

Damit ergibt sich die Ertragsfunktion:

$$\begin{array}{rl|l} E(x) &= (4000 + 200(30 - x)) \cdot x & \text{ausmultiplizieren} \\ E(x) &= (4000 + 6000 - 200x) \cdot x & \text{zusammenfassen} \\ E(x) &= (10'000 - 200x) \cdot x & \text{ausmultiplizieren} \\ E(x) &= 10'000 - 200x^2 & \end{array}$$

Nun können die Ableitungen von $E(x)$ bestimmt werden:

$$E'(x) = 10'000 - 400x \qquad E''(x) = -400$$

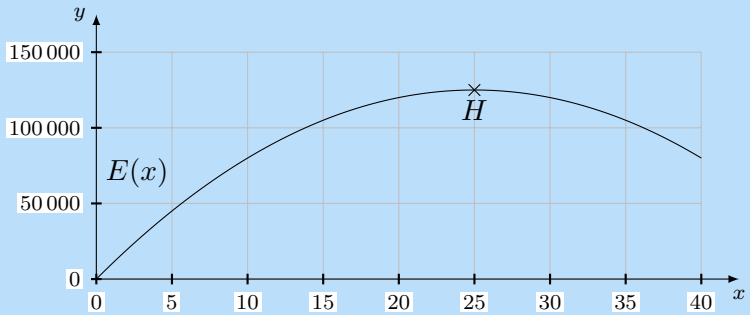
Die erste Ableitung wird Null gesetzt, um die Extremstellen zu finden:

$$\begin{array}{rl|l} 0 &= 10'000 - 400x & +400x \\ 400x &= 10'000 & : 400 \\ x &= 25 & \end{array}$$

Also ist der Ertrag am grössten, wenn der Stückpreis $\boxed{25 \text{ Franken}}$ beträgt, nämlich 125'000 Franken:

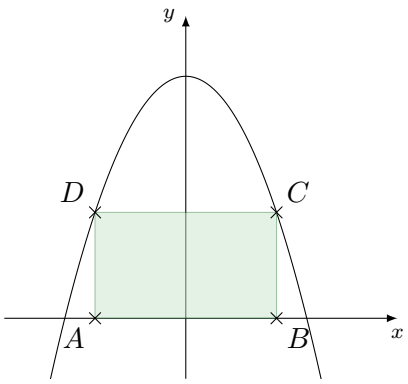
$$E(25) = 10'000 \cdot 25 - 200 \cdot 25^2 = 125'000$$

Visualisierung: Die Ertragsfunktion $E(x)$ gibt den Ertrag in Abhängigkeit des Stückpreises x an. Die x-Koordinate des Hochpunkts H ist der Stückpreis mit dem maximalen Ertrag, die y-Koordinate ist der maximale Ertrag.



5. **Funktion.** Die Seite $\overline{AB}$ des Rechtecks $ABCD$ liegt auf der x-Achse, die Ecken C und D liegen auf dem Funktionsgraphen von $f(x) = 4 - x^2$. Wie muss die x-Koordinate von B gewählt werden, damit die Fläche des Rechtecks möglichst gross wird?

   Lösungsvideo

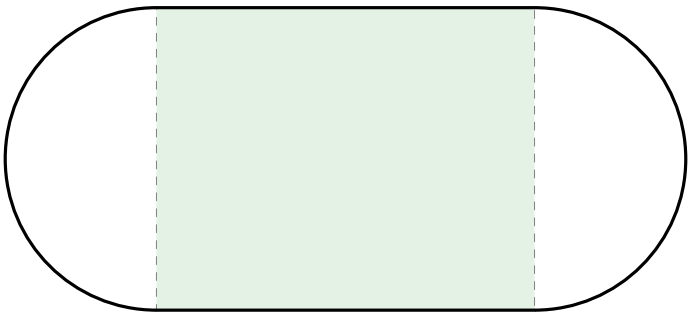


Lösung:

6. **Fussballstation.** In einem neuen Stadion soll das Fussballfeld (grüne Fläche) mit einer 400 m langen Laufbahn (schwarze Linie) umgeben werden. Die Laufbahn besteht aus zwei geraden Stücken entlang der Rasenfläche und zwei halbkreisförmigen Kurven.

   Wie müssen die Länge und Breite der Rasenfläche gewählt werden, damit deren Fläche möglichst gross wird?

   Lösungsvideo



Lösung: Die Länge und Breite des Rechtecks werden mit x und y bezeichnet. Dann kann die Länge der Laufbahn wie folgt ausgedrückt werden:

$$400 = 2x + \pi y \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{400 - 2x}{\pi} = \frac{400}{\pi} - \frac{2}{\pi}x$$

Die Fläche kann nun als Funktion von x ausgedrückt werden:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(\frac{400}{\pi} - \frac{2}{\pi} \cdot x \right) = \frac{400}{\pi}x - \frac{2}{\pi}x^2$$

Die Ableitung lautet:

$$A'(x) = \frac{400}{\pi} - \frac{4}{\pi}x$$

Die Ableitung wird Null gesetzt:

$$\begin{array}{rl|l} 0 = \frac{400}{\pi} - \frac{4}{\pi}x & & \cdot\pi \\ 0 = 400 - 4x & & +4x \\ 4x = 400 & & : 4 \\ x = 100 & & \end{array}$$

Nun wird gezeigt, dass dies ein Hochpunkt ist. Die zweite Ableitung lautet:

$$A''(x) = \frac{1}{\pi} \cdot (-4) = \frac{-1}{\pi} < 0$$

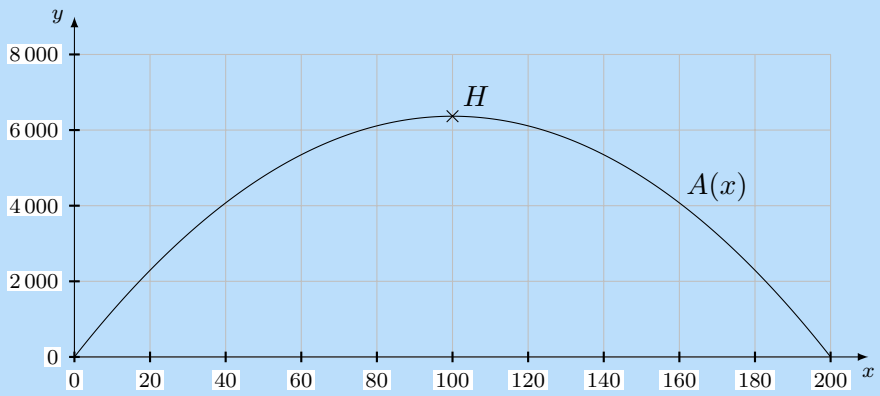
Die zweite Ableitung ist immer negativ, also handelt es sich um einen Hochpunkt.

Schliesslich wird y berechnet:

$$y = \frac{400 - 2x}{\pi} = \frac{200}{\pi} \approx 63.67$$

Die Rasenfläche muss $\boxed{100\,\text{m}}$ lang und $\boxed{63.67\,\text{m}}$ breit sein.

Visualisierung: Die Flächenfunktion $A(x)$ gibt die Rasenfläche in Abhängigkeit der Rasenlänge x an. Die x-Koordinate des Hochpunkts H ist die gesuchte optimale Länge des Rasens, sodass die y-Koordinate, also die Rasenfläche, maximal wird.



7. **Newton-Verfahren.** Bestimmen Sie die Nullstellen der angegebenen Funktion.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 1 \qquad x_1 = 1$$

Lösung: Die Ableitung lautet:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

Somit ist die rekursive Darstellung der Folge:

$$x_{n+1} = x - \frac{x^3 + x^2 - 1}{3x^2 + 2x}$$

Die Folgenglieder lauten:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 0.8$$
$$x_3 = 0.756818182$$
$$x_4 = 0.754881474$$
$$x_5 = 0.754877666$$
$$x_6 = 0.754877666$$