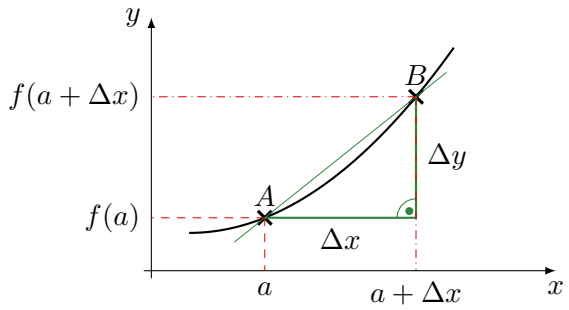
Merkblatt Differenzialrechnung

Steigung

Mittlere Steigung

Die mittlere Steigung des Graphen von $f(x)$ zwischen zwei Punkten A und B ist die Steigung der Geraden AB.



Die mittlere Steigung wird mit dem **Differenzenquotienten** berechnet.

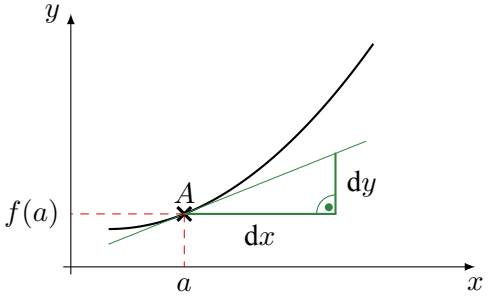
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Beispiel. *Die mittlere Steigung von* $f(x) = x^2$ *auf dem Intervall* $[4, 6]$ *ist*

$$\frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{6^2 - 4^2}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Lokale Steigung

Die lokale Steigung des Graphen von $f(x)$ beim Punkt A ist die Steigung der Tangente bei diesem Punkt.



Die lokale Steigung wird mit dem **Differenzialquotienten** berechnet.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$$

Beispiel. *Die lokale Steigung von* $f(x) = x^2$ *an der Stelle* $a = 4$ *ist*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} \right) = 8$$

Ableitung

Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist die Funktion, die für jedes x die Steigung des Graphen von $f(x)$ an dieser Stelle zurückliefert.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

Die Ableitung einer Funktion bestimmen heisst **ableiten** oder **differenzieren**. Die Ableitung einer Funktion wird mit einem Apostroph bezeichnet.

Beispiel. *Die Ableitung von* $f(x) = x^2$ *ist* $f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$.

Differenzierbarkeit

Wenn eine Funktion einen «Knick» hat, kann dort keine Ableitung bestimmt werden, da die Richtung der Tangente nicht eindeutig festgelegt ist.

Ableitungsregeln

Damit beim Ableiten einer Funktion nicht immer der Grenzwert berechnet werden muss, werden allgemeine Regeln verwendet, welche mit Hilfe des Grenzwertes bewiesen wurden.

Konstantenregel. Der Graph einer konstanten Funktion hat immer die Steigung 0.

$$f(x) = c \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0$$

Beispiel. $f(x) = 5 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0$

Additionsregel. Die Ableitung der Summe zweier Funktionen f und g ist gleich der Summe der Ableitungen von f und g.

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad \Longrightarrow \quad h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel. $f(x) = x^2 + 5 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x + 0$

Faktorregel. Die Ableitung des Produkts einer Funktion f mit einer Konstante c ist gleich dem Produkt der Ableitung der Funktion mit der Konstante.

$$h(x) = c \cdot f(x) \quad \Longrightarrow \quad h'(x) = c \cdot f'(x)$$

Beispiel. $f(x) = 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

Potenzen. Um die Ableitung der Funktion x^n zu erhalten, wird der Exponent n mit der um eins reduzierten Potenz multipliziert.

$$f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Beispiel. $f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

Mit diesen Regeln ist es möglich, die Ableitung von sämtlichen Polynomfunktionen zu bestimmen. Dazu wird jeder Summand des Polynoms mit dem entsprechenden Exponenten multipliziert und anschliessend der Exponent um eins reduziert. Der konstante Summand wird weggelassen.

Beispiel.

$$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 5$$
$$f'(x) = 3 \cdot 5x^2 - 2 \cdot 3x^1 + 2x^0 - 0 = 15x^2 - 6x + 2$$

Bedeutung der Ableitungen

Erste Ableitung $f'(x)$

- Steigung des Graphen von f
- Änderungsrate
- Geschwindigkeit

Zweite Ableitung $f''(x)$

- Krümmung des Graphen von f
- Änderung der Änderungsrate
- Beschleunigung

Bedeutung des Nullsetzens

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \text{ Nullstellen } (x\text{-Koordinaten der Nullpunkte}) \\
f'(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \ x\text{-Koordinaten der möglichen Extrempunkte} \\
f''(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \ x\text{-Koordinaten der möglichen Wendepunkte}
\end{aligned}
$$

y-Koordinaten bestimmen

Um die y-Koordinate eines Punkts auf dem Graphen von f zu bestimmen, wird die Stelle oder x-Koordinate a in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$$y = f(a)$$

Nullpunkte bestimmen $f(x) = 0$

Die Nullpunkte sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse. Dort ist die y-Koordinate gleich Null. Die Nullstellen, d. h. die x-Koordinaten der Nullpunkte ergeben sich, indem die Funktionsgleichung gleich Null gesetzt und nach x aufgelöst wird.

Extrempunkte bestimmen $f'(x) = 0$

Bei Extrempunkten ist die Steigung gleich Null. Die x-Koordinaten von Extrempunkten ergeben sich, indem die erste Ableitung Null gesetzt und nach x aufgelöst wird.

1. Erste und zweite Ableitung bestimmen.
2. Erste Ableitung gleich Null setzen und Gleichung lösen. Die Lösungen der Gleichung sind die möglichen x-Koordinaten der Extrempunkte.
3. Jede x-Koordinate in zweite Ableitung $f''(x)$ einsetzen, um zu überprüfen, ob es sich um ein Hoch- oder Tiefpunkt handelt:

   $$
   \begin{aligned}
   f''(x) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Tiefpunkt} \\
   f''(x) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Hochpunkt} \\
   f''(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Sonderfall}
   \end{aligned}
   $$

4. Jede x-Koordinate in ursprüngliche Funktionsgleichung $f(x)$ einsetzen, um y-Koordinate zu bestimmen.

Wendepunkte bestimmen $f''(x) = 0$

Bei Wendepunkten ist die Krümmung gleich Null. Die x-Koordinaten von Wendepunkten ergeben sich, indem die zweite Ableitung gleich Null gesetzt und nach x aufgelöst wird.

1. Erste, zweite und dritte Ableitung bestimmen.
2. Zweite Ableitung gleich Null setzen und Gleichung lösen. Die Lösungen der Gleichung sind die möglichen x-Koordinaten der Wendepunkte.
3. Jede x-Koordinate in dritte Ableitung $f'''(x)$ einsetzen, um zu überprüfen, ob es sich tatsächlich um einen Wendepunkt handelt.

   $f'''(x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Wendepunkt
   $f'''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Sonderfall

4. Jede x-Koordinate in ursprüngliche Funktionsgleichung $f(x)$ einsetzen, um y-Koordinate zu bestimmen.

Tangente bestimmen

Eine Tangente an den Graphen von f an einer Stelle a ist eine Gerade, welche an der Stelle a die gleiche y-Koordinate und die gleiche Steigung wie der Graph f hat. Geradengleichung:

$$t(x) = mx + q$$

1. Erste Ableitung bestimmen.
2. Stelle a in erste Ableitung einsetzen, um Steigung $m = f'(a)$ zu berechnen.
3. Stelle a in originale Funktion einsetzen, um y-Koordinate $y = f(a)$ zu berechnen.
4. m und Punkt (a/y) in Geradengleichung einsetzen, um den y-Achsenabschnitt q zu berechnen: $y = mx + q$ nach q auflösen.
5. m und q in Geradengleichung einsetzen.

Der Steigungswinkel der Tangente ist der Arkustangens der Steigung: $\varphi = \arctan(m)$

Kurvendiskussion

Kurvendiskussion bedeutet, dass wichtige Eigenschaften der Funktion ermittelt werden, sodass der Verlauf des Funktionsgraphen skizziert werden kann. Wir machen folgendes:

1. Nullpunkte bestimmen.
2. Extrempunkte bestimmen.
3. Wendepunkte bestimmen.
4. Graph skizzieren.