Musterprobe Differenzialrechnung

Zeit: 80 Minuten, Hilfsmittel: Taschenrechner und Fundamentum,
mindestens vier signifikante Stellen angeben

Aufgabe	1	2	3	4	5	Total	Note
max. Punkte	6	6	6	7	8	33	
Punkte							

1. Ableitung von Polynomen. **(6P)**

Bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ (2P)

Lösung: $f'(x) = 12x^2 - 6x + 7$

(b) $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 4x + 1$ (2P)

Lösung: $g'(x) = 20x^3 - 6x^2 + 16x - 4$

(c) $h(x) = 2x^5 - 6x^3 + 3x^2 - x$ (2P)

Lösung: $h'(x) = 10x^4 - 18x^2 + 6x - 1$

2. Differenzialquotient. **(6P)**

In dieser Aufgabe wird mit der folgenden Funktion gearbeitet:

$$f(x) = x^2 - x$$

(a) Bestimme mit Hilfe der **Differenzenquotienten** die mittlere Steigung des Funktionsgraphen auf dem Intervall $[2, 4]$. (1P)

Lösung:

$$m = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{12 - 2}{4 - 2} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$$

Die mittlere Steigung in diesem Intervall beträgt $\boxed{5}$.

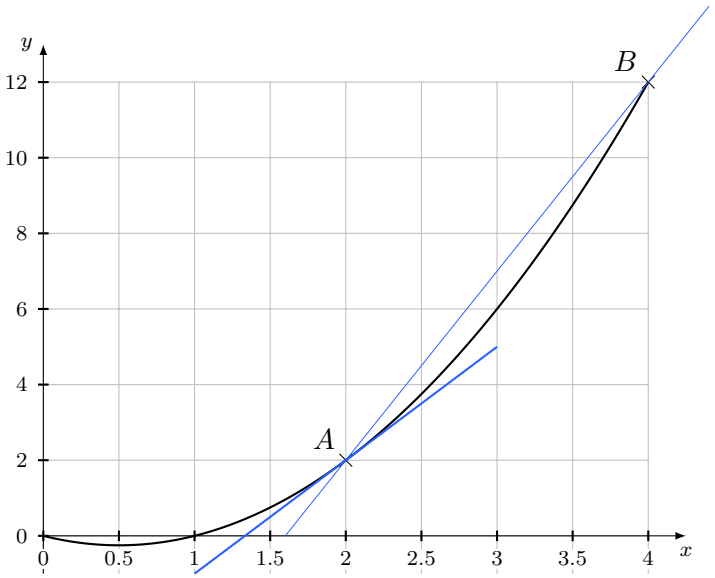
(b) Bestimme mit Hilfe des **Differenzialquotienten** die lokale Steigung des Funktionsgraphen an der Stelle $x = 2$. (2P)

Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\left((2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)\right)-\left(2^2-2\right)}{\Delta x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{2^2+4\,\Delta x+\Delta x^2-2-\Delta x-2}{\Delta x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x^2+3\,\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+3) = 3\end{aligned}$$

Die lokale Steigung an der Stelle $x=2$ beträgt $\boxed{3}$.

(c) Zeichne die in Teilaufgaben (a) und (b) bestimmten Steigungen in die grafische Darstellung ein. (1P)



(d) Erkläre (in vollständigen Sätzen) anhand der grafischen Darstellung die geometrische Bedeutung der mittleren und lokalen Steigung. (2P)

Lösung: Die mittlere Steigung ist die Steigung der Geraden durch die Punkte A und B (**1P**). Die lokale Steigung ist die Steigung der Tangenten an den Graphen im Punkt A (**1P**).

3. Auto. **(6P)**

Der Weg eines Autos beim Anfahren ist durch die folgende Funktion gegeben:

$$s(t) = 1.5t^2$$

Dabei ist $s(t)$ der zurückgelegte Weg in Meter nach t Sekunden.

(a) Ermittle die Beschleunigung des Autos. (2P)

Lösung: Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung der Bewegungsfunktion, also:

$$\begin{aligned}s(t) &= 1.5t^2\\ s'(t) &= 2\cdot 1.5t = 3t\\ s''(t) &= 3\end{aligned}$$

Die Beschleunigung des Autos beträgt $\boxed{3\,\text{m/s}^2}$.

(b) Berechne, wie lange das Auto braucht, um 60 m weit zu fahren. (2P)

Lösung: Dazu wird die Bewegungsfunktion gleich 60 gesetzt:

$$\begin{aligned} 1.5t^2 &= 60 \quad &&| : 1.5 \\ t^2 &= 40 \quad &&| \sqrt{} \\ t &= \pm\sqrt{40} \approx \pm 6.3256 \end{aligned}$$

Die negative Lösung wird ignoriert, da das Auto nicht in der Zeit rückwärts fährt.

Das Auto benötigt $\boxed{6.3256\,\text{s}}$, um 60 m weit zu fahren.

mit Lösungsformel:

$$1.5t^2 - 60 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1.5 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1.5} = \pm\frac{\sqrt{360}}{3} = \pm\sqrt{40}$$

(c) Welche Geschwindigkeit hat das Auto zum Zeitpunkt, wo es 60 m zurückgelegt hat? (2P)

Lösung: Für die Geschwindigkeit wird die erste Ableitung benötigt. Achtung, es muss der Zeitpunkt 6.325 eingesetzt werden, zu welchem das Auto die 60 m zurückgelegt hat:

$$s'(6.3256) = 3 \cdot 6.3256 = 18.9768$$

Das Auto hat dann eine Geschwindigkeit von $\boxed{18.9768\,\text{m/s}}$.

4. Streichholzschachtel. Eine Streichholzschachtel soll so gebaut werden, dass die Länge drei Mal so gross ist wie die Breite. Wie muss die Höhe gewählt werden, damit bei einer konstanten Oberfläche von 288 cm^2 das Volumen maximal ist? (7P)

Lösung:

x : Breite
y : Länge
z : Höhe

Die Länge ist drei Mal so gross wie die Breite: $y = 3x$.

Das Volumen beträgt

$$V = x \cdot y \cdot z = x \cdot 3x \cdot z = 3x^2 z$$

Die Oberfläche des Quaders beträgt:

$$S = 2xy + 2xz + 2yz = 2x \cdot 3x + 2xz + 2 \cdot 3x \cdot z = 6x^2 + 2xz + 6xz = 6x^2 + 8xz$$

Die Oberfläche beträgt 288:

$$\begin{aligned} 288 &= 6x^2 + 8xz \quad \big| -6x^2 \\ 288 - 6x^2 &= 8xz \quad \big| :8x \end{aligned}$$

$$\frac{288 - 6x^2}{8x} = z$$

Nun wird z wird in der Volumenformel ersetzt:

$$V = 3x^2 z = 3x^2 \cdot \frac{288 - 6x^2}{8x} = \frac{3x^2 \cdot \left(288 - 6x^2\right)}{8x} = \frac{3x\left(288 - 6x^2\right)}{8}$$
$$= \frac{3x \cdot 288}{8} - \frac{3x \cdot \left(-6x^2\right)}{8} = 108x - 2.25x^3$$

Jetzt wird abgeleitet:

$$V'(x) = 108 - 6.75x^2$$
$$V''(x) = -13.5x$$

Die Ableitung wird gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned} 0 &= -6.75x^2 + 108 \quad \big| +6.75x^2 \\ 6.75x^2 &= 108 \quad \big| :6.75 \\ x^2 &= 16 \quad \big| \sqrt{\ } \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Die Lösung $x = -4$ fällt weg, da die Schachtel eine positive Breite haben muss. Also muss die Schachtel 4 cm breit sein. Nun kann mit der Formel oben die Höhe ausgerechnet werden:

$$z = \frac{288 - 6x^2}{8x} = 6$$

Die Höhe der Schachtel muss also $\boxed{6\,\text{cm}}$ betragen.

5. Kurvendiskussion. **(8P)**

Führe eine Kurvendiskussion der folgenden Funktion durch:

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right)(x - 2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

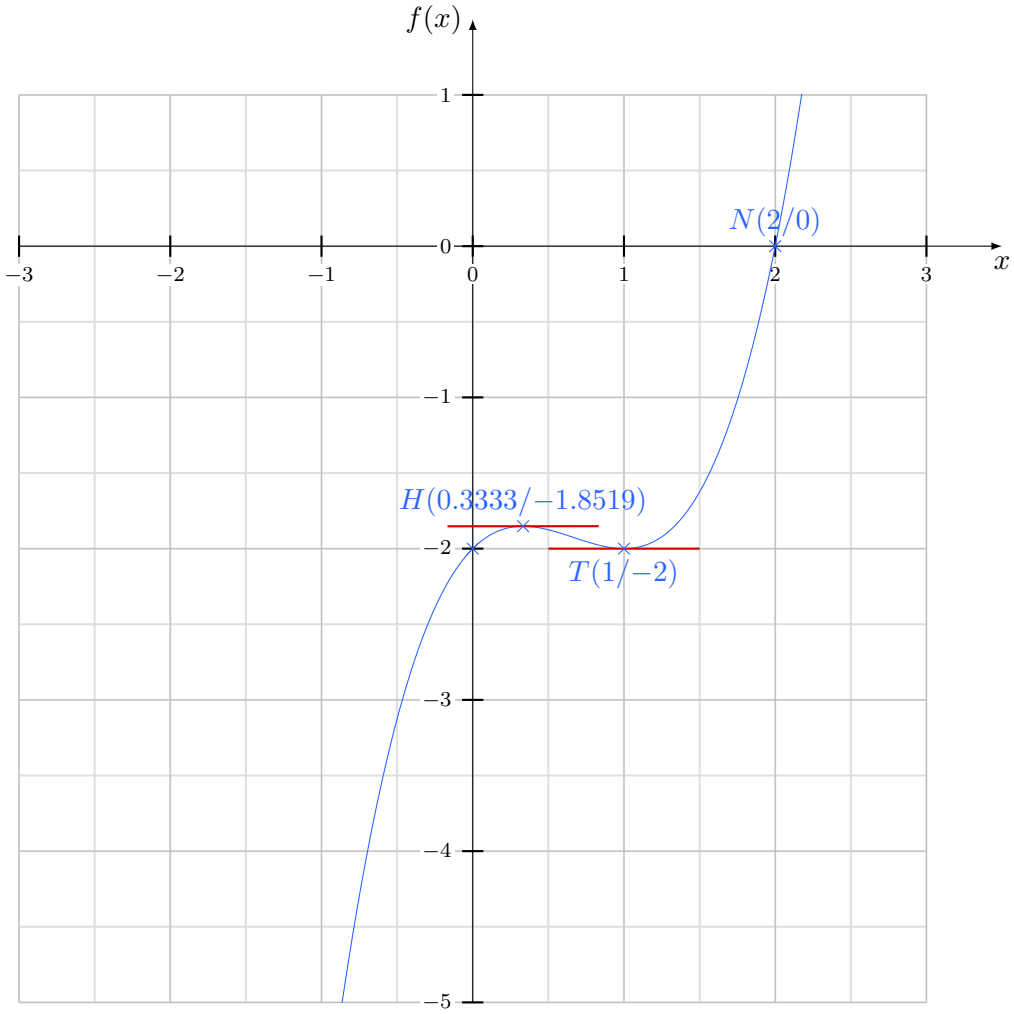
(a) Gib alle Nullpunkte der Funktion an. (2P)

(b) Gib alle Hoch- und Tiefpunkte der Funktion an. (2P)

(c) Gib alle Wendepunkte der Funktion an. (1P)

(d) Zeichne diese Punkte in das Koordinatensystem ein. (1P)

(e) Zeichne den Funktionsgraphen in das Koordinatensystem ein. (2P)



Lösung: Funktion und Ableitungen

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

Nullpunkte $f(x) = 0$

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot (x - 2) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt muss entweder $x^2 + 1 = 0$ oder $x - 2 = 0$ gelten.

- **Fall 1:** $x^2 + 1 = 0$: Hier gibt es keine Lösungen, da ein Quadrat nie negativ sein kann.
- **Fall 2:** $x - 2 = 0$: Hier ist die Lösung $x = 2$.

Es gibt nur einen Nullpunkt N mit den Koordinaten $\boxed{N(2/0)}$.

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Mit der Lösungsformel ergibt sich:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$$

Die Extrempunkte liegen also bei $x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{6}{6} = 1$.

- $x = \frac{1}{3}$: Die Krümmung ist $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - 4 = -2 < 0$. Die Steigung nimmt ab, der Graph ist nach rechts gekrümmt, also handelt es sich um einen Hochpunkt. Die y-Koordinate lautet:

  $$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{1}{3} - 2 = \tfrac{1}{27} - \tfrac{6}{27} + \tfrac{9}{27} - \tfrac{54}{27} = \tfrac{-50}{27} \approx -1.8519$$

- $x = 1$: Die Krümmung ist $f''(1) = 6 - 4 = 2 > 0$. Der Graph ist also nach links gekrümmt, also handelt es sich um einen Tiefpunkt. Die Koordinate lautet:

  $$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 2 = -2$$

  Es gibt also den Hochpunkt $\boxed{H(0.3333/-1.8519)}$ und den Tiefpunkt $\boxed{T(1/-2)}$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 6x - 4 = 0$$

Die Lösung ist $x = \frac{2}{3}$. Die y-Koordinate beträgt:

$$f\left(\tfrac{2}{3}\right) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3} - 2 = \tfrac{8}{27} - \tfrac{24}{27} + \tfrac{18}{27} - \tfrac{54}{27} = \tfrac{-52}{27} \approx -1.9259$$

Der Wendepunkt hat die Koordinaten $\boxed{W(0.6667/-1.9259)}$