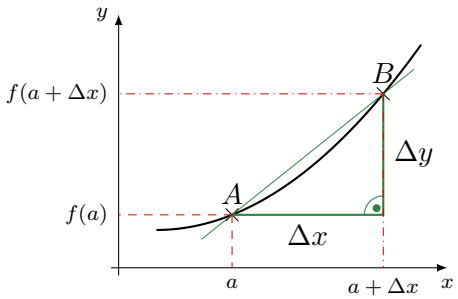
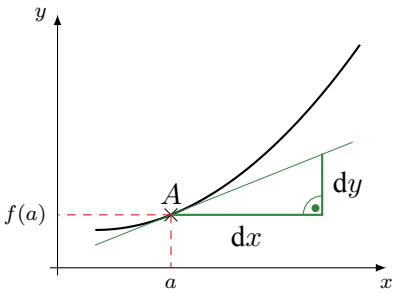
Differenzialrechnung

Stefan Rothe

14.11.2026





$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$$

Inhaltsverzeichnis

1 Ableitung **2**
2 Ableiten von Polynomfunktionen **5**
3 Ableiten weiterer Funktionen **6**
4 Kurvendiskussion **11**
5 Newtonverfahren **16**
6 Herleitung der Ableitungsregeln **18**

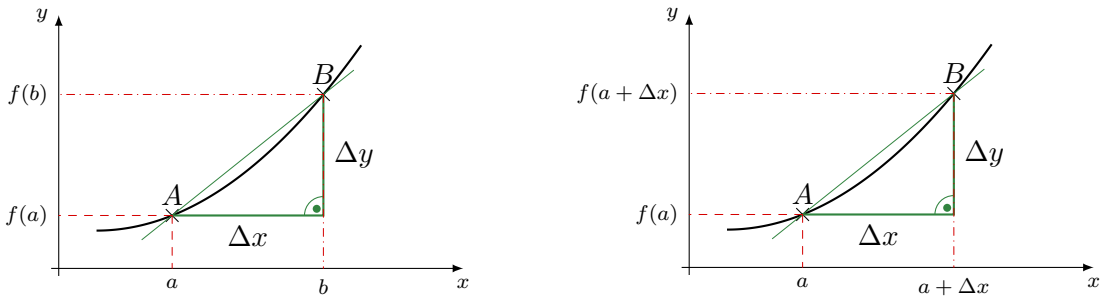
© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Ableitung

1.1 Mittlere Steigung und Differenzenquotient

Bei einer linearen Funktion, also einer Geraden, ist die Steigung festgelegt.

Wenn der Graph einer Funktion f gekrümmt ist, kann nur die **mittlere Steigung** auf einem Intervall $[a, b]$ bestimmt werden.



Dazu werden die zwei Punkte A und B auf dem Graphen an den Stellen a und b betrachtet. Die horizontale und vertikale Differenz der beiden Punkte betragen

$$\Delta x = b - a \qquad\qquad \Delta y = f(b) - f(a)$$

Damit ergibt sich folgende Formel für die mittlere Steigung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Alternativ kann das Intervall auch durch die Anfangsstelle a und die Breite Δx definiert werden. Diese Variante wird in der Abbildung oben rechts dargestellt. Das führt zu einer anderen Formel für die mittlere Steigung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Mittlere Steigung. Die mittlere Steigung oder **mittlere Änderungsrate** der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ beträgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Diese Formel heisst **Differenzenquotient** der Funktion $f(x)$.

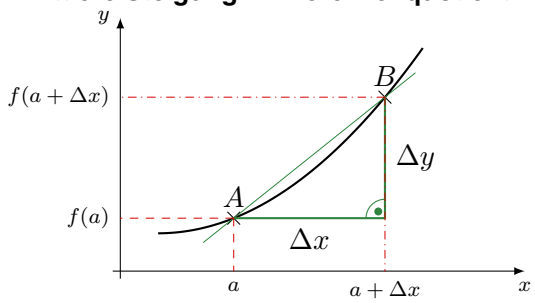
Beispiel. *Die mittlere Steigung des Graphen der Funktion* $f(x) = x^2 - 1$ *auf dem Intervall* $[1, 3]$ *beträgt*

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1 - \left(1^2 - 1\right)}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

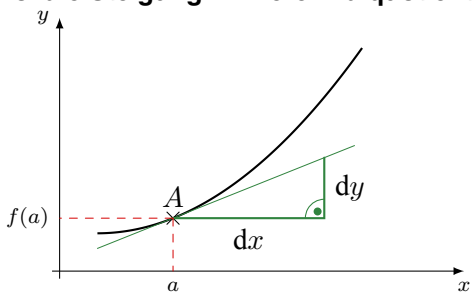
1.2 Lokale Steigung und Differenzialquotient

Um die lokale Steigung eines Funktionsgraphen zu berechnen, wird zunächst von der mittleren Steigung ausgegangen. Die mittlere Steigung eines immer kleineren Intervalls, welches bei A beginnt, nähert sich immer mehr der lokalen Steigung bei A an.

Mittlere Steigung / Differenzenquotient



Lokale Steigung / Differenzialquotient



Anders ausgedrückt nähert sich der Differenzenquotient für immer kleinere Werte von Δx der lokalen Steigung an. Das bedeutet, dass die Steigung m_t der Tangenten an der Stelle a durch den folgenden Grenzwert ausgedrückt werden kann.

Lokale Steigung. Wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle a differenzierbar ist, dann entspricht die Steigung an der Stelle a dem Grenzwert

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$$

Dieser Ausdruck heisst **Differenzialquotient** der Funktion f.

Obschon der Differenzenquotient für $\Delta x = 0$ natürlich nicht definiert ist, kann dieser Grenzwert oft durch geschicktes Umformen berechnet werden.

Beispiel. *Für die Funktion $f(x) = x^2$ kann der Differenzenquotient wie folgt umgeformt werden:*

$$\begin{aligned} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} &= \frac{(a + \Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} = \frac{a^2 + 2a\,\Delta x + \Delta x^2 - a^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2a\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2a + \Delta x)}{\Delta x} = 2a + \Delta x \end{aligned}$$

Von diesem Term kann nun der Grenzwert für $\Delta x \to 0$ bestimmt werden:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2a + \Delta x) = 2a$$

Die Steigung des Graphen von $f(x) = x^2$ an der Stelle a ist also $2a$.

1.3 Ableitungsfunktion

Wenn eine Funktion stetig ist, d.h. wenn ihr Graph keine Knicke und Unterbrüche hat, so kann die Steigung des Graphen für jede beliebige Stelle x bestimmt werden. Daraus ergibt sich eine neue Funktion, die Ableitung.

Die Ableitung f' einer Funktion f ist die Funktion, welche für jedes x die Steigung des Funktionsgraphen von $f(x)$ berechnet.

Ableitungsfunktion. Die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f ist die Funktion

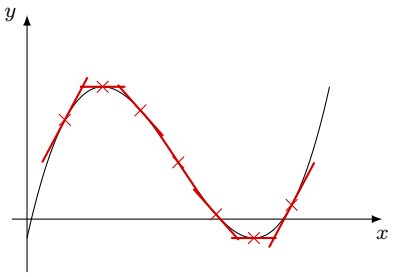
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

Der Wert $f'(x_0)$ der Ableitungsfunktion an einer Stelle x_0 gibt die Steigung der Funktion f an dieser Stelle an.

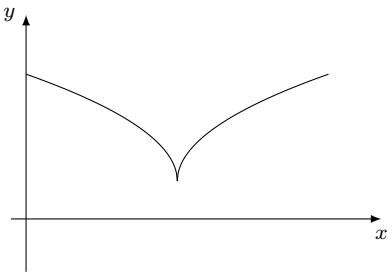
Beispiel. *Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ lautet $f'(x) = 2x$.*

1.4 Differenzierbarkeit

Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt kann gemessen werden, indem eine Tangente durch P an den Graphen gelegt wird und deren Steigung gemessen wird.



Lokale Steigungen an verschiedenen Stellen des Graphen



Graph mit «Knick» wo keine lokale Steigung definiert werden kann

Dies ist grundsätzlich möglich bei Funktionsgraphen, welche keine Lücken oder Knicke haben. In der Mathematik wird eine solche Funktion als **differenzierbar** bezeichnet. Der oben stehende Funktionsgraph einer kubischen Funktion erfüllt diese Bedingung. An jedem beliebigen Punkt kann eine Tangente an den Graphen gelegt und somit die Steigung bestimmt werden.

2 Ableiten von Polynomfunktionen

Mit Hilfe von allgemeingültigen Ableitungsregeln kann ausgehend von einer Funktion deren Ableitungsfunktion bestimmt werden.

Die folgenden einfachen Ableitungsregeln sind notwendig, um Polynomfunktionen ableiten zu können. Diese Regeln können mit Hilfe der Definition des Differenzialquotienten hergeleitet werden. Interessierte können dies im letzten Kapitel nachlesen.

Konstantenregel. Die Ableitung einer Konstanten c ist die Nullfunktion.

$$(c)' = 0$$

Beispiel. $f(x) = 5 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0$

Additionsregel. Die Ableitung der Summe zweier Funktionen f und g ist gleich der Summe der Ableitungen von f und g.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Beispiel. $f(x) = x^2 + 5 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x + 0 = 2x$

Faktorregel. Die Ableitung des Produkts einer Funktion f mit einer Konstante c ist gleich dem Produkt der Ableitung der Funktion mit der Konstante.

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \qquad (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

Beispiel. $f(x) = 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

Potenzen. Um die Ableitung der Funktion x^n zu erhalten, wird der Exponent n mit der um eins reduzierten Potenz multipliziert.

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Beispiel. $f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

Mit diesen Regeln ist es möglich, die Ableitung von sämtlichen Polynomfunktionen zu bestimmen. Dazu wird jeder Summand des Polynoms mit dem entsprechenden Exponenten multipliziert und anschliessend der Exponent um eins reduziert. Der konstante Summand wird weggelassen.

Beispiel.

$$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 5$$
$$f'(x) = 3 \cdot 5x^2 - 2 \cdot 3x^1 + 2x^0 - 0 = 15x^2 - 6x + 2$$

3 Ableiten weiterer Funktionen

3.1 Ableiten von Produkten und Quotienten

Produktregel. Die Ableitung des Produkts der Funktionen f und g kann wie folgt berechnet werden:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad (f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

Beispiel. *Die Funktion $h(x) = \left(x^2-2\right)\cdot(4x+3)$ kann wie folgt als Produkt zweier Funktionen dargestellt werden:*

$$h(x) = f(x)\cdot g(x) \qquad f(x) = x^2-2 \qquad g(x) = 4x+3$$

Zunächst werden die Ableitungen von f und g bestimmt:

$$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = 4$$

Nun kann mit der Produktregel die Ableitung von h ermittelt werden:

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) = 2x\cdot(4x+3) + \left(x^2-2\right)\cdot 4 \\ &= 8x^2 + 6x + 4x^2 - 8 = 12x^2 + 6x - 8 \end{aligned}$$

Mit ein wenig Übung kann die Anwendung der Produktregel in einem einzigen Schritt erfolgen. Hier werden der Übersicht halber die zu f und g gehörenden Terme farblich markiert:

$$\left(\left(x^2-2\right)\cdot(4x+3)\right)' = 2x\cdot(4x+3) + \left(x^2-2\right)\cdot 4$$

Quotientenregel. Die Ableitung des Quotienten der Funktionen f und g kann wie folgt berechnet werden:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

Beispiel. *Die Funktion $h(x) = \frac{3x+1}{x^2}$ kann wie folgt als Quotient zweier Funktionen dargestellt werden:*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad f(x) = 3x+1 \qquad g(x) = x^2$$

Zunächst werden die Ableitungen von f und g bestimmt:

$$f'(x) = 3 \qquad g'(x) = 2x$$

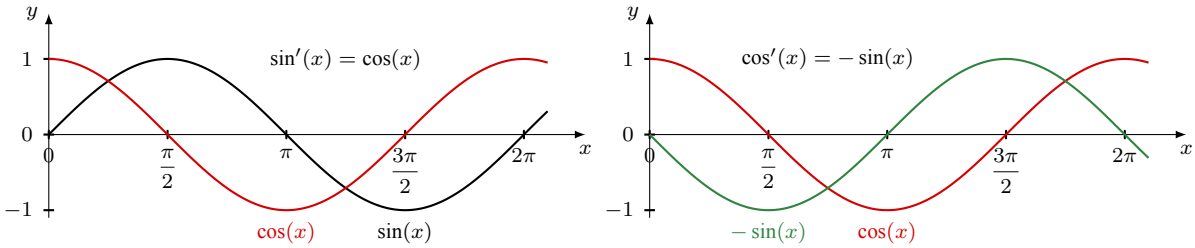
Nun kann mit der Quotientenregel die Ableitung von h ermittelt werden:

$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{3\cdot x^2 - (3x+1)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^2 - 6x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-3x^2-2x}{x^4}$$

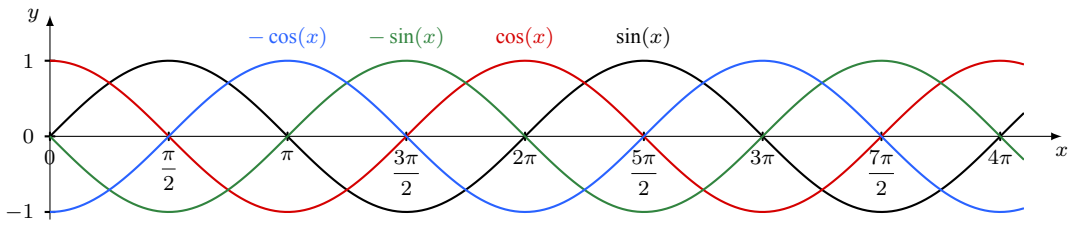
Auch hier kann die Ableitung mit der Quotientenregel in einem Schritt durchgeführt werden.

3.2 Ableiten der Winkelfunktionen

Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion. Dies kann grafisch nachvollzogen werden. Die Extrempunkte von $\sin(x)$ sind bei $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$, dort sind die Nullstellen von $\cos(x)$. Die Sinusfunktion steigt am stärksten bei 0 und sinkt am meisten bei π, dort sind das Maximum und das Minimum der Kosinusfunktion.



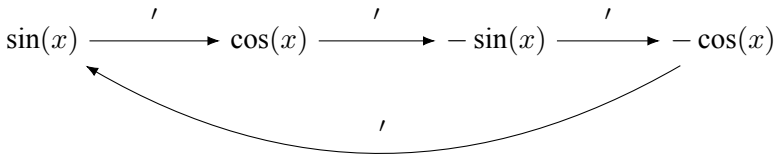
Anders gesagt, das Ableiten verschiebt die Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links. Wird die Kosinusfunktion abgeleitet, so entsteht $-\sin(x)$. Nach vier Mal ableiten entsteht wiederum die Sinusfunktion.



Sinus und Kosinus. Die Ableitung des Sinus ist der Kosinus, die Ableitung des Kosinus ist der negative Sinus.

$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Daraus ergibt sich folgende Reihenfolge beim mehrfachen Ableiten der Sinusfunktion:



Tangens. Die Ableitung der Tangensfunktion ist

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Die Ableitung der Tangensfunktion kann wie folgt hergeleitet werden: Zunächst wird die Tangensfunktion als Quotient der Sinus- und Kosinusfunktion geschrieben.

$$\tan'(x) = (\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$$

Nun wird dieser mit Hilfe der Quotientenregel abgeleitet:

$$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)}$$

Jetzt wird $\sin'(x)$ und $\cos'(x)$ ersetzt:

$$\frac{\sin'(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

Im Zähler ergibt sich also der Term $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Damit ergibt sich die Darstellung der Ableitung mit Kosinus:

$$\frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Alternativ kann der Term in zwei Brüche aufgeteilt werden. Der linke Bruch ist gleich Eins, der rechte ist gleich dem Tangens im Quadrat:

$$\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x)$$

3.3 Kettenregel

Kettenregel. Die Ableitung der Verkettung der Funktionen f und g kann wie folgt berechnet werden:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad (f(g))' = f'(g)\cdot g'$$

Beispiel. *Die Funktion $h(x) = \sin(2x)$ kann wie folgt als Verkettung zweier Funktionen dargestellt werden:*

$$h(x) = f(g(x)) \qquad f(\square) = \sin(\square) \qquad g(x) = 2x$$

Zunächst werden die Ableitungen der Funktionen f und g bestimmt:

$$f'(\square) = \cos(\square) \qquad g'(x) = 2$$

Nun kann die Ableitung von h mit Hilfe der Kettenregel bestimmt werden:

$$h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = \cos(\square)\cdot 2 = \cos(2x)\cdot 2 = 2\cos(2x)$$

3.4 Ableiten der Exponentialfunktionen

Wird die Ableitung der Exponentialfunktion a^x mit Hilfe des Differenzialquotienten bestimmt, so ergibt sich

$$(a^x)' = G_a \cdot a^x$$

Dabei ist G_a ein Grenzwert, also eine Zahl, welche abhängig von der Basis a ist. Wenn als Basis die Eulersche Zahl $\mathrm{e} \approx 2.71828\ldots$ gewählt wird, ist G_e gerade gleich Eins.

Also ist die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion mit Basis e die Funktion selbst.

Ableitung natürliche Exponentialfunktion. Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion ist die Funktion selbst:

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

Um Exponentialfunktionen mit einer anderen Basis ableiten zu können, müssen diese mit der Basis e ausgedrückt werden können. Dazu wird der folgende Ansatz gewählt:

$$\begin{array}{rl|l} a^x &= \mathrm{e}^{c\cdot x} & \ln \\ x \cdot \ln(a) &= c \cdot x \cdot \ln(\mathrm{e}) & :x \\ \ln(a) &= c & \end{array}$$

Damit können sämtliche Exponentialfunktionen als natürliche Exponentialfunktion mit der Basis e dargestellt werden.

Basiswechsel Exponentialfunktion. Eine Exponentialfunktion a^x mit der Basis a kann als Exponentialfunktion mit der Basis e geschrieben werden:

$$a^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln(a)}$$

Um die allgemeine Exponentialfunktion a^x abzuleiten, wird sie zur Basis e umgeformt. Anschliessend kann mit Hilfe der Kettenregel abgeleitet werden.

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\cdot\ln(a)}\right)' = \mathrm{e}^{x\cdot\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$$

Ableitung allgemeine Exponentialfunktion. Die Ableitung der Exponentialfunktion mit einer beliebigen Basis a ist:

$$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$$

Beispiel. *Die Ableitung der Funktion* $f(x) = 10^x$ *ist* $f'(x) = \ln(10) \cdot 10^x$.

3.5 Ableiten der Logarithmusfunktionen

Ableitung natürliche Logarithmusfunktion. Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion ist

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^+$$

Um eine Logarithmusfunktion mit einer anderen Basis abzuleiten, muss zuerst ein Basiswechsel vorgenommen werden.

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \qquad \Longrightarrow \qquad (\log_a(x))' = \left(\frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)\right)' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

Ableitung allgemeine Logarithmusfunktion. Die Ableitung der allgemeinen Logarithmusfunktion ist

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a) \cdot x} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^+$$

Beispiel. *Die Ableitung der Funktion* $f(x) = \log_2(x)$ *ist* $f'(x) = \frac{1}{\ln(2) \cdot x}$.

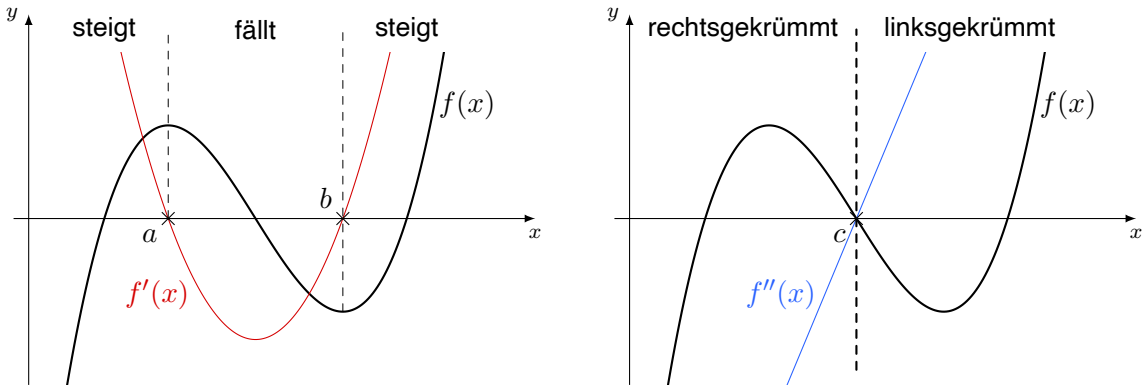
4 Kurvendiskussion

Mit Hilfe der Ableitungen einer Funktion kann das «Verhalten», also das Aussehen des Funktionsgraphen analysiert werden.

4.1 Wachstums- und Krümmungsverhalten

Die **erste Ableitung** f' einer Funktion f gibt für jede Stelle x die **Steigung** des Funktionsgraphen an. Das bedeutet, dass an der ersten Ableitung das **Wachstumsverhalten** des Funktionsgraphen abgelesen werden kann.

Wenn sich der Funktionsgraph der Ableitung unterhalb der x-Achse befindet, wie im folgenden Beispiel auf dem Intervall $[a, b]$, dann sinkt der Graph von f in diesem Bereich. Ausserhalb des Intervalls befindet sich der Graph der Ableitung oberhalb der x-Achse. Somit ist die Ableitung positiv und der Graph von f steigt in diesen Bereichen an.



Die **zweite Ableitung** f'' einer Funktion f gibt für jede Stelle x die Veränderung der Steigung des Funktionsgraphen an. Das bedeutet, dass an der zweiten Ableitung das **Krümmungsverhalten** des Funktionsgraphen abgelesen werden kann.

Wenn sich der Funktionsgraph der zweiten Ableitung unterhalb der x-Achse befindet, wie im oben stehenden Beispiel links von c, dann nimmt die Steigung des Graphen ab, er krümmt sich also gegen rechts. Rechts von c befindet sich die zweite Ableitung oberhalb der x-Achse. Die Steigung nimmt also zu, der Graph krümmt sich nach links.

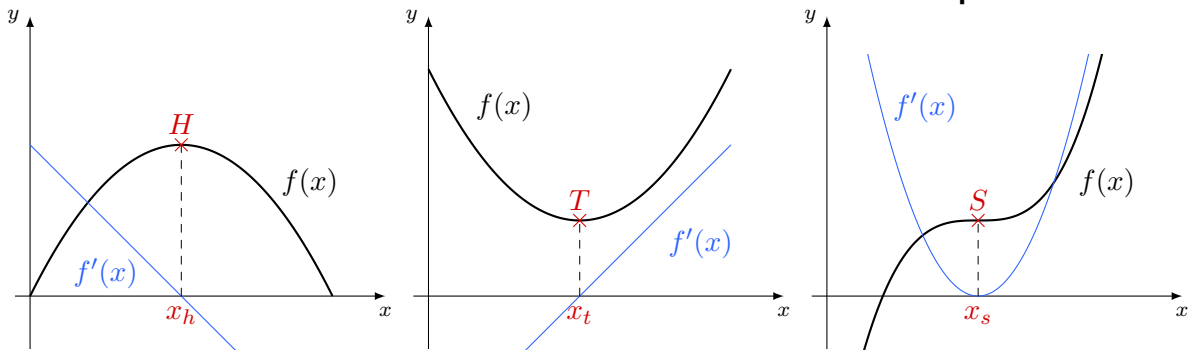
4.2 Nullstellen

Der Graph der Funktion schneidet die x-Achse in den Nullstellen. Diese werden durch Nullsetzen der Funktionsgleichung bestimmt:

$$f(x) = 0$$

4.3 Hoch- und Tiefpunkte

Hoch- und Tiefpunkte sind Punkte des Funktionsgraphen, bei welchen sich die Richtung der Steigung ändert. Falls der Graph vor einem solchen Punkt steigt und danach sinkt, hat der Funktionsgraph dort ein **lokales Maximum** erreicht. Ein solcher Punkt wird **Hochpunkt** genannt. Falls umgekehrt der Graph vor einem solchen Punkt fällt und danach steigt, dann ist dort ein **lokales Minimum** erreicht worden. Ein solcher Punkt wird als **Tiefpunkt** bezeichnet.



H ist ein Hochpunkt T ist ein Tiefpunkt S ist ein Terrassenpunkt

Zusammenfassend werden Hoch- und Tiefpunkte als **Extrempunkte** oder **Extrema** bezeichnet.

In einem Extrempunkt wechselt die Steigung der Funktionsgraphen von positiv zu negativ oder umgekehrt. Das bedeutet, dass die Steigung im Extrempunkt selbst gleich Null sein muss. Extrema können also ermittelt werden, indem die erste Ableitung der Funktion gleich Null gesetzt wird.

Damit werden aber auch Punkte gefunden, die keine Extrema sind. Der Graph der Funktion oben rechts hat im Punkt S die Steigung Null, er ändert aber die Richtung der Steigung nicht. Solche Punkte werden als **Terrassenpunkte** oder **Sattelpunkte** bezeichnet.

Um Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte unterscheiden zu können, wird zusätzlich die zweite Ableitung der Funktion betrachtet.

Hochpunkt. Ein Punkt auf dem Funktionsgraphen f an der Stelle x_h heisst Hochpunkt von f, wenn die erste Ableitung gleich Null ist und die zweite Ableitung negativ ist.

$$f'(x_h) = 0 \qquad f''(x_h) < 0$$

Tiefpunkt. Ein Punkt auf dem Funktionsgraphen f an der Stelle x_t heisst Tiefpunkt von f, wenn die erste Ableitung gleich Null ist und die zweite Ableitung positiv ist.

$$f'(x_t) = 0 \qquad f''(x_t) > 0$$

Terrassenpunkt. Ein Punkt auf dem Funktionsgraphen f an der Stelle x_s heisst Terrassenpunkt von f, wenn die erste und die zweite Ableitung an dieser Stelle gleich Null sind.

$$f'(x_s) = 0 \qquad f''(x_s) = 0$$

Das Vorgehen, um diese speziellen Punkte zu finden, ist folgendermassen:

Extrem- und Terrassenpunkte finden.

1. Ableitungen f' und f'' bestimmen.
2. x-Koordinaten der Punkte: Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen.
   $f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_p$
3. Zweite Ableitung an diesen Stellen berechnen, um Art des Punkts zu bestimmen:

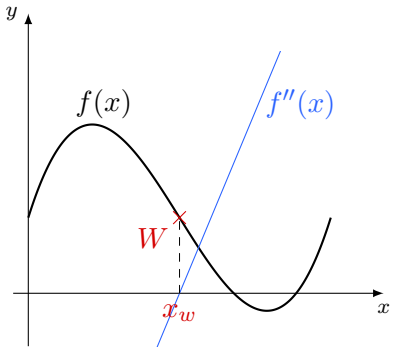
   $f''(x_p) > 0 \quad \Longrightarrow$ Tiefpunkt
   $f''(x_p) < 0 \quad \Longrightarrow$ Hochpunkt
   $f''(x_p) = 0 \quad \Longrightarrow$ Terrassenpunkt

4. Funktionswert an den gefundenen Stellen bestimmen.
   $y_p = f(x_p)$

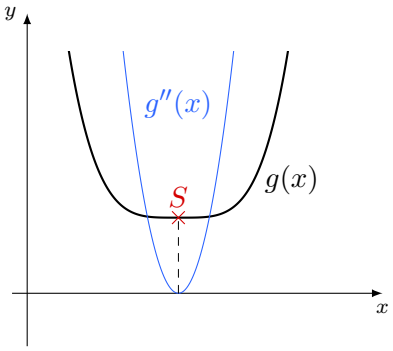
4.4 Wendepunkte

Wendepunkte sind Punkte des Funktionsgraphen, bei welchen sich die Richtung der Krümmung ändert. An einem solchen Punkt muss die Krümmung gleich Null sein.

Diese Punkte können also gefunden werden, indem die zweite Ableitung gleich Null gesetzt wird.



W ist ein Wendepunkt



S ist kein Wendepunkt

Damit werden aber auch Punkte gefunden, die keine Wendepunkte sind. So können Polynomfunktionen 4. Grades im Scheitelpunkt S die Krümmung Null haben, obschon die Richtung der Krümmung nicht ändert. Oben rechts ist der Graph g einer solchen Funktion abgebildet.

Um sicher zu sein, dass es sich um einen Wendepunkt handelt, muss zusätzlich die dritte Ableitung angeschaut werden. Nur, wenn diese an dieser Stelle ungleich Null ist, handelt es sich um einen Wendepunkt.

Wendepunkt. Ein Punkt auf dem Funktionsgraphen von f an der Stelle x_w heisst Wendepunkt von f, wenn die zweite Ableitung an dieser Stelle gleich Null ist und die dritte Ableitung ungleich Null ist.

$$f''(x_w) = 0 \qquad f'''(x_w) \neq 0$$

Das Vorgehen, um die Wendepunkte eines Funktionsgraphen f zu finden, ist folgendermassen:

Wendepunkte finden.

1. Ableitungen f', f'' und f''' bestimmen.
2. x-Koordinaten der Wendepunkte: Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmen.
   $f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_w$
3. Überprüfen, ob die dritte Ableitung an diesen Stellen ungleich Null ist:
   $f'''(x_w) \neq 0$.
4. y-Koordinaten y_w der Wendepunkte durch Einsetzen in der Funktionsgleichung bestimmen:
   $y_w = f(x_w)$

Beispiel. *Die Wendepunkte der Funktion $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ sollen ermittelt werden.*

Zunächst werden die Ableitungen bestimmt:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \qquad f''(x) = 36x^2 - 24x \qquad f'''(x) = 72x - 24$$

Um die x-Koordinaten der Wendepunkte zu bestimmen, wird die zweite Ableitung gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 36x^2 - 24x \quad \Big| \quad f''(x) = 0 \\ 0 &= 36x^2 - 24x \quad \Big| \quad 12x \text{ ausklammern} \\ 0 &= 12x(3x - 2) \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt ergeben sich die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}$.

Die Stellen werden in die dritte Ableitung eingesetzt, um zu überprüfen, ob es sich tatsächlich um Wendepunkte handelt:

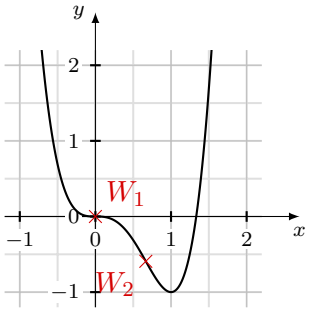
$$f'''(x_1) = f'''(0) = 72 \cdot 0 - 24 = -24 \neq 0$$
$$f'''(x_2) = f'''\left(\tfrac{2}{3}\right) = 72 \cdot \tfrac{2}{3} - 24 = 24 \neq 0$$

An beiden Stellen handelt es sich also um Wendepunkte. Nun werden noch die y-Koordinaten ermittelt:

$$f(x_1) = f(0) = 3 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$$
$$f(x_2) = f\left(\tfrac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 - 4 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \frac{3 \cdot 16}{81} - \frac{4 \cdot 8}{27} = \frac{16 - 32}{27} = \frac{-16}{27} \approx -0.593$$

Die Wendepunkte des Funktionsgraphen von f lauten

$W_1(0/0)$ $\qquad$ $W_2\left(\frac{2}{3}/\frac{-16}{27}\right)$



5 Newtonverfahren

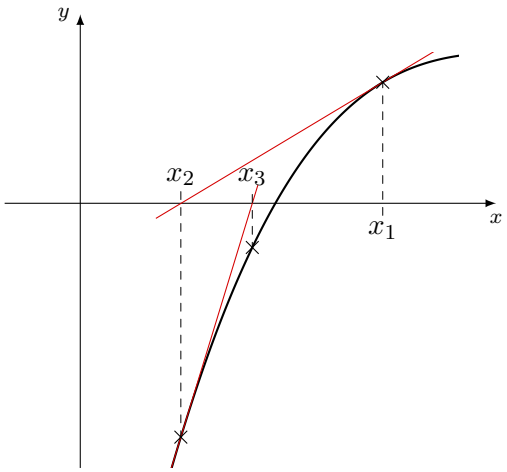
Das Newtonverfahren oder Newton-Raphson-Verfahren wurde von Isaac Newton und Joseph Raphson entwickelt.

Es ist ein häufig verwendeter Algorithmus, um Nullstellen von Funktionen näherungsweise zu bestimmen.

5.1 Idee

Es wird eine Stelle x_1 in der Nähe der gesuchten Nullstelle gewählt. An dieser Stelle wird die Tangente an den Graphen der Funktion gelegt. Die Nullstelle der Tangente x_2 wird als Näherung der Nullstelle der Funktion gewählt.

Dort wird wiederum die Tangente an den Graphen gelegt und deren Nullstelle x_3 als neue Näherung gewählt und so weiter.



Die Strecke, um welche x_1 verschoben werden muss, entspricht der horizontalen Kathete Δx des Steigungsdreiecks. Die Steigung ist bekanntermassen definiert als

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x = \frac{\Delta y}{m}$$

Für die Stelle x_1 gilt $m = f'(x_1)$ und $\Delta y = f(x_1)$. Werden diese in die Gleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$\Delta x = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Um x_2 zu erhalten, muss x_1 um Δx nach links verschoben werden, also

$$x_2 = x_1 - \Delta x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

5.2 Verfahren

Ausgehend von einem gewählten Startwert x_1 wird eine Zahlenfolge (x_n) mit folgender rekursiver Darstellung aufgestellt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Folge (x_n) konvergiert relativ schnell gegen eine Nullstelle der Funktion $f(x)$, falls der gewählte Startwert x_1 nahe genug an der Nullstelle liegt.

Beispiel. *Die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 4$ in der Nähe von $x = -2$ soll bestimmt werden.*

Zunächst wird die Ableitung bestimmt:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Nun wird die rekursive Darstellung der Folge angegeben:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 4}{3x_n^2 - 3}$$

Jetzt können die Folgenglieder x_n berechnet werden:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= -2.222222222 \\ x_3 &= -2.196215024 \\ x_4 &= -2.195823434 \\ x_5 &= -2.195823345 \\ x_6 &= -2.195823345 \end{aligned}$$

Newtonverfahren mit dem TI-30X Plus. Um das Newtonverfahren effizient mit dem Taschenrechner durchzuführen, wird folgendes Vorgehen empfohlen:

1. Anfangswert eingeben und in der Variable x Speichern mit sto→ x^{yzt}_{abcd}
2. Formel eingeben, dabei für x_n die Variable x verwenden mit der Taste x^{yzt}_{abcd}.
3. Mit enter den nächsten Wert berechnen und mit sämtlichen Dezimalstellen notieren.
4. Mit sto→ x^{yzt}_{abcd} den Wert in der Variable x speichern.
5. Mit der Pfeiltaste ▲ wieder zur Formel gehen.

Schritte 3. bis 5. wiederholen, bis sich die Dezimalstellen nicht mehr ändern.

6 Herleitung der Ableitungsregeln

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie die Ableitungsregeln mit Hilfe der Definition des Differenzialquotienten hergeleitet werden können.

6.1 Konstantenregel

Für die Konstantenregel ist zu zeigen, dass

$$h(x) = c \qquad \Longrightarrow \qquad h'(x) = 0$$

Da die Funktion $h(x) = c$ immer den gleichen Wert c hat, heben sich die Funktionswerte im Zähler des Differenzialquotienten auf und dieser hat somit immer den Wert 0.

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{c - c}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{0}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

6.2 Additionsregel

Für die Additionsregel ist zu zeigen, dass

$$h(x) = f(x) + g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Zunächst wird der Differenzialquotient der Funktion h gebildet. In diesem wird h gemäss Voraussetzung durch $f + g$ ersetzt. Im Zähler werden die Summanden umgestellt und anschliessend der Bruch so aufgeteilt, dass die Differenzialquotienten der beiden Funktionen f und g entstehen.

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) = f'(x) + g'(x)$$

6.3 Faktorregel

Für die Faktorregel ist zu zeigen, dass

$$h(x) = c \cdot f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad h'(x) = c \cdot f'(x)$$

Zunächst wird der Differenzialquotient der Funktion h gebildet und in diesem h durch $c \cdot f$ ersetzt. Der Faktor c kann aus dem Zähler des Differenzialquotienten ausgeklammert werden, sodass der Differenzialquotient von f entsteht.

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{c \cdot (f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} \right) = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = c \cdot f'(x)$$

6.4 Potenzfunktionen

Für die Ableitung der Potenzfunktion ist zu zeigen, dass

$$f(x) = x^n \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

Zunächst wird der Differenzialquotient der Funktion f gebildet. Die Potenz kann mit dem binomischen Lehrsatz als Summe dargestellt werden. Der erste Summand $\binom{n}{0} x^n \, \Delta x^0 = x^n$ wird aus der Summe herausgenommen und fällt im Zähler weg.

Nun kommt Δx in allen Summanden und kann aus der Summe herausgenommen und gekürzt werden. Danach wird der Summand $\binom{n}{1} x^{n-1} \, \Delta x^{1-1} = nx^{n-1}$ aus der Summe herausgenommen. Jetzt kommt Δx wieder in allen Summanden vor und wird aus der Summe herausgenommen. Danach wird der Grenzübergang vollzogen und die Summe fällt weg.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sum_0^n \binom{n}{k} x^{n-k} \, \Delta x^k - x^n}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cancel{x^n} + \sum_1^n \binom{n}{k} x^{n-k} \, \Delta x^k - \cancel{x^n}}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cancel{\Delta x} \cdot \sum_1^n \binom{n}{k} x^{n-k} \, \Delta x^{k-1}}{\cancel{\Delta x}} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_1^n \binom{n}{k} x^{n-k} \, \Delta x^{k-1} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \sum_2^n \binom{n}{k} x^{n-k} \, \Delta x^{k-1} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \Delta x \cdot \sum_2^n \binom{n}{k} x^{n-k} \, \Delta x^{k-2} \right)$$

$$= nx^{n-1} + 0 \cdot \sum_2^n \binom{n}{k} x^{n-k} \, \Delta x^{k-2} = nx^{n-1}$$

6.5 Produktregel

Für die Produktregel ist zu zeigen, dass

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Zunächst wird der Differenzialquotient der Funktion h gebildet. In diesem wird h gemäss Voraussetzung durch $f \cdot g$ ersetzt. Im Zähler wird der Term $f(x) \cdot g(x + \Delta x)$ addiert und gleich wieder subtrahiert. Anschliessend wird der Term durch geschicktes Ausklammern so umgeformt, dass die Differenzialquotienten von f und g entstehen.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) \cdot (f(x + \Delta x) - f(x)) + f(x) \cdot (g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) \cdot (f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x) \cdot (g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (g(x + \Delta x)) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\
&= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

6.6 Exponentialfunktion (Potenzreihe)

Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion kann auf zwei Arten hergeleitet werden. Bei der ersten Variante wird die Darstellung der natürlichen Exponentialfunktion als Grenzwert einer Reihe verwendet:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

Jeder Summand dieser Reihe ist ein Polynom, welches abgeleitet werden kann. Damit kann die Summe wie folgt abgeleitet werden:

$$(\mathrm{e}^x)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{6} + \frac{4x^3}{24} + \cdots = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Es fällt auf, dass um einen Summand verschoben wieder die genau gleiche Summe entsteht. Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion ergibt also wieder die gleiche Funktion.

Dieser Nachweis kann mathematisch präziser geführt werden, indem die zugrunde liegende Folge betrachtet wird. Die explizite Darstellung lautet:

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

Das n-te Folgenglied kann nach x abgeleitet werden, indem im Zähler die Potenzregel verwendet wird. Im Nenner wird n aus der Fakultät herausgenommen. Danach kann mit n gekürzt werden, es entsteht das $(n-1)$-te Folgenglied.

$$(a_n)' = \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \frac{n \cdot x^{n-1}}{n \cdot (n-1)!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = a_{n-1}$$

Die Ableitung von a_n ist also a_{n-1}. Da eine Summe gliedweise abgeleitet wird, kann beispielsweise die Summe dreier Folgenglieder wie folgt abgeleitet werden:

$$(a_1 + a_2 + a_3)' = (a_1)' + (a_2)' + (a_3)' = a_0 + a_1 + a_2$$

Das gilt analog für eine unendliche Summe:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)' = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots)' = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Nun kann die Ableitung der ursprünglichen Summe bestimmt werden. Dabei wird verwendet, dass $a_0 = 1$ und somit $(a_0)' = 0$.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)' = \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)' = (a_0)' + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)' = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Damit ist bewiesen, dass die Ableitung der Summe und somit e^x wiederum die gleiche Summe, also wiederum e^x, ergibt.