Grundlagen

1. **Spiegelung.** Gegeben ist der Punkt $P(5/2/1)$. Bestimme die Koordinaten des Spiegelbilds P', wenn P gespiegelt wird
   (a) an der xy-Ebene. $P'(5/2/-1)$
   (b) an der xz-Ebene. $P'(5/-2/1)$
   (c) an der x-Achse. $P'(5/-2/-1)$
   (d) an der z-Achse. $P'(-5/-2/1)$
   (e) am Ursprung. $P'(-5/-2/-1)$

2. **Rechnen mit Vektoren.** Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   Wie lauten die Komponenten der folgenden Vektoren?
   (a) $\vec{u} = 2\vec{a} - 1.5\vec{b} + 3\vec{c}$

   Lösung:

$$\vec{u} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 1.5 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ -13 \end{pmatrix}}$$

   (b) $\vec{v} = 3\left(\vec{a} - 4\vec{b}\right) - 5\vec{c}$

   Lösung:

$$\vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 144 \\ 72 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 178 \\ 60 \\ 9 \end{pmatrix}}$$

   (c) $\vec{w} = 5\vec{a} - 2\left(\vec{b} + 3\vec{c}\right)$

   Lösung:

$$\vec{w} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 69 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

3. **Länge.** Welche Länge haben die folgenden Vektoren?
   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Lösung:

$$\sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = \boxed{\sqrt{18} = 3\sqrt{2}}$$

(b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

(c) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \boxed{\sqrt{6}}$$

(d) $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$= \sqrt{9^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{81 + 16 + 4} = \boxed{\sqrt{101}}$$

(e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

(f) $\begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$= \sqrt{0.5^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{0.25 + 1 + 4} = \boxed{\sqrt{5.25}}$$

4. Länge. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(a) Welche Länge hat der Vektor $\vec{a}$?

Lösung:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = \boxed{9}$$

(b) Welche Komponenten hat der Vektor $\vec{b}$, welcher parallel zu $\vec{a}$ liegt und die Länge 22.5 hat?

Lösung: $\frac{22.5}{9} = 2.5$ Der Vektor $\vec{b}$ ist 2.5-mal so lang wie $\vec{a}$. Da $\vec{b}$ auch entgegengesetzt gerichtet zu $\vec{a}$ sein kann, folgt:

$$\vec{b} = \pm 2.5 \cdot \vec{a} = \pm 2.5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -7.5 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}} \text{ oder } \boxed{\begin{pmatrix} 7.5 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix}}$$

5. Abstand. Wie gross ist der Abstand zwischen den Punkten A und B?

(a) $A(0/0/0) \quad B(3/0/-4)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

(b) $A(7/-1/3) \quad B(-1/5/3)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{64 + 36 + 0} = \sqrt{100} = \boxed{10}$$

(c) $A\left(-4/3/\sqrt{11}\right) \quad B(-1/7/0)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ \sqrt{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -\sqrt{11} \end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + \left(-\sqrt{11}\right)^2} = \sqrt{9 + 16 + 11} = \sqrt{36} = \boxed{6}$$

(d) $A(5/-1/2) \quad B(3/-6/5)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 25 + 9} = \boxed{\sqrt{38}}$$

6. Abstand. Welche Koordinaten haben die Punkte auf der z-Achse, welche vom Punkt $P(-6/3/7)$ den Abstand 7 haben?

Lösung: Die gesuchten Punkte haben die Koordinaten $Q(0/0/z)$. Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ wird berechnet:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ z-7 \end{pmatrix}$$

Die Länge von $\overrightarrow{PQ}$ muss gleich 7 sein:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (z-7)^2} &= 7 && \text{quadrieren} \\ 6^2 + (-3)^2 + (z-7)^2 &= 49 && \text{ausrechnen} \\ 36 + 9 + (z-7)^2 &= 49 && -45 \\ (z-7)^2 &= 4 && \sqrt{\ } \\ z - 7 &= \pm\sqrt{4} && +7 \\ z &= 7 \pm 2 \end{aligned}$$

Die Koordinaten der gesuchten Punkte lauten:

$\boxed{Q_1(0/0/5)}$ $\boxed{Q_2(0/0/9)}$

7. Abstand. Welche Koordinaten hat der Punkt P auf der y-Achse, welcher von den Punkten $A(3/4/-7)$ und $B(-1/2/1)$ gleich weit entfernt ist?

Lösung: Vektoren $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ sowie ihre Längen berechnen:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ y-4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{9 + (y-4)^2 + 49}$$

$$\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y-2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{1 + (y-2)^2 + 1}$$

Längen gleich setzen:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}| &= |\overrightarrow{BP}| && \text{einsetzen} \\ \sqrt{9 + (y-4)^2 + 49} &= \sqrt{1 + (y-2)^2 + 1} && \text{quadrieren} \\ (y-4)^2 + 58 &= (y-2)^2 + 2 && \text{ausmultiplizieren} \\ y^2 - 8y + 16 + 58 &= y^2 - 4y + 4 + 2 && -y^2 + 4y - 6 \\ 68 &= 4y && :4 \\ 17 &= y \end{aligned}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $\boxed{P(0/17/0)}$.