Geraden

1. **Geraden.** Wie lautet eine Parametergleichung der Geraden, welche

   (a) durch $A(-4/0/3)$ und $B(3/2/5)$ geht?

   Lösung: Zuerst muss der Richtungsvektor berechnet werden:

   $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Die Geradengleichung lautet:

   $$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

   (b) durch $A(2/-1/5)$ geht und die x-Achse bei $x = 5$ schneidet?

   Lösung: Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat die Koordinaten $S(5/0/0)$. Damit ist der Richtungsvektor:

   $$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

   Die Geradengleichung lautet:

   $$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

   (c) durch $A(4/3/-3)$ geht und parallel zur x-Achse ist?

   Lösung: «Parallel zur x-Achse» ergibt den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Geradengleichung lautet:

   $$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

   (d) durch $A(7/5/3)$ geht und parallel zur y-Achse ist?

   Lösung: «Parallel zur y-Achse» ergibt den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Geradengleichung lautet:

   $$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

   (e) durch $A(5/-1/2)$ geht und parallel zur Geraden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist?

   Lösung: Der Richtungsvektor wird der Geradengleichung entnommen: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die

Geradengleichung lautet:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

2. Geraden. Wie lautet eine Parametergleichung der Geraden durch die Punkte A und B?

(a) $A(-3/2/0)$ $B(2/6/0)$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $A(2/-7/6)$ $B(3/0/-5)$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

(c) $A(0/-6/3)$ $B(-5/3/2)$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d) $A(-1/7/8)$ $B(6/-3/2)$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

3. Punkte. Welche der folgenden Punkte liegen auf der Geraden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

(a) $A(5/4/2)$

Lösung: Das t wird am einfachsten durch den Vergleich der x-Komponenten bestimmt:

$$2 + t \cdot 1 = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 3$$

Nun wird überprüft, ob sich für $t = 3$ tatsächlich der Punkt A ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt A liegt auf der Geraden.

(b) $B(0/-11/-7)$

Lösung: Das t wird durch den Vergleich der x-Komponenten bestimmt:

$$2 + t \cdot 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = -2$$

Nun wird überprüft, ob sich für $t = -2$ tatsächlich der Punkt B ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden.

(c) $C(7.5/11.5/7)$

Lösung: Das t wird durch den Vergleich der x-Komponenten bestimmt:

$$2 + t \cdot 1 = 7.5 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 5.5$$

Nun wird überprüft, ob sich für $t = 5.5$ tatsächlich der Punkt C ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + 5.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 11.5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Punkt C liegt auf der Geraden.

4. **Punkte.** Welche der folgenden Punkte liegen auf der Geraden durch die Punkte $C(5/2/3)$ und $D(4/5/6)$?

(a) $A(3/8/9)$

Lösung: Die Geradengleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das t wird durch den Vergleich der x-Komponenten bestimmt:

$$\begin{array}{rl|l} 3 = 5 + t \cdot (-1) & & \text{ausrechnen} \\ 3 = 5 - t & \left| \begin{array}{l} +t \\ -3 \end{array} \right. & \\ 3 + t = 5 & & \\ t = 2 & & \end{array}$$

Nun wird $t = 2$ in der Geradengleichung eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

A liegt also auf der Geraden.

(b) $B(1/-10/-8)$

Lösung: B liegt nicht auf der Geraden.

5. **Punkte.** Die Gerade g geht durch den Punkt $R(3/-2/1)$ und ist parallel zur Geraden durch

die Punkte $P(1/4/-2)$ und $Q(3/8/-1)$. Liegt der Punkt $S(-2/-12/-1.5)$ auf der Geraden g?

Lösung: Schritt 1: Richtungsvektor der Geraden bestimmen:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Parametergleichung der Geraden bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Anhand einer Koordinate (hier z.B. z) den Parameter t bestimmen:

$$\begin{array}{rl|l} z = 1 + t & & z = -1.5 \\ -1.5 = 1 + t & & -1 \\ -2.5 = t & & \end{array}$$

Schritt 4: Überprüfen, ob sich für $t = -2.5$ tatsächlich der Punkt S ergibt.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten stimmen mit den Koordinaten von S überein, also liegt S auf der Geraden g.

6. **Abstand.** Gegeben ist die Gerade durch die zwei Punkte $A(6/-8/3)$ und $B(-6/8/7)$. Welche Punkte auf der Geraden haben den Abstand 3 vom Punkt $C(1/-2/3)$?

Lösung: Zunächst wird die Parametergleichung der Geraden aufgestellt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6-6 \\ 8-(-8) \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nun wird der Vektor von C zu einem Punkt der Geraden bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-12t-1 \\ -8+16t+2 \\ 3+4t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12t+5 \\ 16t-6 \\ 4t \end{pmatrix}$$

Jetzt wird die Länge dieses Vektors berechnet und gleich 3 gesetzt:

$$\begin{array}{rl|l} \sqrt{(-12t+5)^2 + (16t-6)^2 + (4t)^2} = 3 & & \text{quadrieren} \\ (-12t+5)^2 + (16t-6)^2 + (4t)^2 = 9 & & \text{ausmultiplizieren} \\ 144t^2 - 120t + 25 + 256t^2 - 192t + 36 + 16t^2 = 9 & & \text{zusammenfassen} \\ 416t^2 - 312t + 52 = 0 & & :4 \\ 104t^2 - 78t + 13 = 0 & & \end{array}$$

Lösungsformel:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{78 \pm \sqrt{(-78)^2 - 4 \cdot 104 \cdot 13}}{2 \cdot 104} = \frac{78 \pm \sqrt{676}}{208} = \frac{78 \pm 26}{208}$$

Dies ergibt die Lösungen $t = \frac{1}{4}$ und $t = \frac{1}{2}$. Werden diese Werte in die Geradengleichung eingesetzt, ergeben sich die folgenden Punkte:

$\boxed{P_1(0/0/5)}$ $\boxed{P_2(3/-4/4)}$

7. **Spurpunkte.** Von einer Geraden g kennt man die Spurpunkte $S_{xy}(-3/2/0)$ und $S_{yz}(0/-4/6)$. Wie lauten die Koordinaten des dritten Spurpunktes S_{xz}?

Lösung:

$S_{xz}(-2/0/2)$

8. **Spurpunkte.** Wie lauten die Koordinaten der Spurpunkte der Geraden durch die Punkte A und B?

(a) $A(3/-5/9)$ $B(7/-1/-3)$

Lösung:

$S_{xy}(6/-2/0)$ $S_{yz}(0/-8/18)$ $S_{xz}(8/0/-6)$

(b) $A(3/1/6)$ $B(4/-1/9)$

Lösung: Schritt 1: Geradengleichung bestimmen. Der Richtungsvektor ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Geradengleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 2a: Parameter t für den Spurpunkt der xy-Ebene bestimmen. Der Parameter ergibt sich aus der Bedingung, dass die z-Koordinate gleich Null sein muss.

$$\begin{array}{rl|l} z = 6 + 3t & & z = 0 \\ 0 = 6 + 3t & & -6 \\ -6 = 3t & & :3 \\ -2 = t & & \end{array}$$

Schritt 2b: Punkt für Parameter $t = -2$ bestimmen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{S_{xy}(1/5/0)}$$

Schritt 3a: Parameter t für den Spurpunkt der yz-Ebene bestimmen. Der Parameter ergibt sich aus der Bedingung, dass die x-Koordinate gleich Null sein muss.

$$\begin{array}{rl|l} x = 3 + t & & x = 0 \\ 0 = 3 + t & & -3 \\ -3 = t & & \end{array}$$

Schritt 3b: Punkt für Parameter $t = -3$ bestimmen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{S_{yz}(0/7/-3)}$$

Schritt 4a: Parameter t für den Spurpunkt der xz-Ebene bestimmen. Der Parameter ergibt sich aus der Bedingung, dass die y-Koordinate gleich Null sein muss.

$$\begin{array}{rl|l} y = 1 - 2t & & y = 0 \\ 0 = 1 - 2t & & +2t \\ 2t = 1 & & :2 \\ t = 0.5 & & \end{array}$$

Schritt 4b: Punkt für Parameter $t = 0.5$ bestimmen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 7.5 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{S_{xz}(3.5/0/7.5)}$$

9. Gegenseitige Lage. Welche gegenseitige Lage haben die Geraden g und h?

(a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4.5 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung: Die beiden Geraden fallen zusammen, d.h. sie sind identisch.

(b) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung: Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $S(5/3/4)$.

(c) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2.5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$

Lösung: Die beiden Geraden sind parallel.

(d) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung: Die beiden Geraden sind windschief.

10. Flugzeug. Ein Flugzeug fliegt auf geradem Weg und mit konstanter Geschwindigkeit von Punkt $A(2/1/4)$ zu Punkt $B(5/2/2)$ und benötigt dafür eine Minute. Dabei gibt die y-Koordinate die Höhe über dem Boden an. Die Koordinaten werden in km angegeben.

(a) Wie lautet eine Parameterform der Gerade, welche die Flugbahn des Flugzeugs beschreibt?

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) Welche Bedeutung hat der Parameter t?

Lösung: Der Parameter t gibt die Flugminuten an, also die Zeit in Minuten, seit das Flugzeug den Punkt A passiert hat.

(c) Nach wie vielen Minuten befindet sich das Flugzeug in einer Höhe von 5 km? Wie lauten die Koordinaten des Punkts, an dem sich das Flugzeug zu diesem Zeitpunkt befindet?

Lösung: Es gilt $y = 5$, also

$$\begin{pmatrix} x \\ 5 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die folgende Gleichung:

$$5 = 1 + t \cdot 1 \quad \Longrightarrow \quad t = 4$$

Nun wird der Punkt für $t = 4$ berechnet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug befindet sich nach $t = 4$ Minuten beim Punkt $\boxed{Q(14/5/-4)}$ auf 5 km Höhe.

(d) Es wird vereinfacht angenommen, dass das Flugzeug seit dem Start des Fluges auf der Höhe $y = 0$ auf der geraden Flugbahn geflogen ist. Wie lauten die Koordinaten des Startpunkts S?

Lösung: Es gilt $y = 0$, also

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die folgende Gleichung:

$$0 = 1 + t \cdot 1 \quad \Longrightarrow \quad t = -1$$

Nun wird der Punkt für $t = -1$ berechnet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug ist beim Punkt $\boxed{S(-1/0/6)}$ gestartet.

11. Schächte. Es werden zwei Schächte in einen Berg gebohrt. Der eine Schacht verläuft durch die Punkte $A(0/4/0)$ und $B(2/3.8/1)$ und der andere verläuft durch $C(a/3.6/4)$ und

geht senkrecht nach unten. Alle Angaben sind in Kilometer gegeben und die y-Komponente gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an.

(a) Wie muss a gewählt werden, damit sich die Schächte treffen und wo treffen sich die beiden Schächte?

Lösung: Geradengleichung g des ersten Schachts durch A und B bestimmen. Der Richtungsvektor ist

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3.8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Gleichung

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung h des zweiten Schachts bestimmen. Da der Schacht senkrecht nach unten verläuft, ist der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Gleichung lautet

$$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3.6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die z-Koordinate ist auf h immer 4. Ein Schnittpunkt von g und h hat daher die z-Koordinate 4, also

$$s = 4$$

und damit als x-Koordinate

$$a = 2s = 8$$

Für $s = 4$ ergibt sich auf g der Punkt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3.2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Schächte treffen sich also für $\boxed{a = 8}$ im Punkt $\boxed{S(8/3.2/4)}$.

(b) An welchen Koordinaten befindet man sich, wenn man im ersten Schacht auf 2500 m über dem Meeresspiegel ist?

Lösung: 2500 m entsprechen 2.5 km, die y-Koordinate ist also $y = 2.5$. Mit der Geradengleichung g aus Teilaufgabe (a) folgt:

$$\begin{array}{rl|l} y = 4 - 0.2s & & y = 2.5 \\ 2.5 = 4 - 0.2s & & -4 \\ -1.5 = -0.2s & & :-0.2 \\ 7.5 = s & & \end{array}$$

Einsetzen von $s = 7.5$ in die Geradengleichung ergibt den Punkt

$$\boxed{P(15/2.5/7.5)}$$

12. Scheinwerfer. Ein Scheinwerfer in Punkt $L(15/0/8)$ strahlt einen Punkt $P(10/1/10)$ an.

(a) Wie lautet die Parameterform der Geraden, welche den Lichtstrahl beschreibt?

Lösung: Der Lichtstrahl geht von L durch P, der Richtungsvektor ist also

$$\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Geradengleichung

$$\boxed{g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Wo trifft der Lichtstrahl auf die Wand, welche in der yz-Ebene liegt?

Lösung: Die Wand liegt in der yz-Ebene, die x-Koordinate des Treffpunkts ist also 0:

$$\begin{array}{rl|l} x = 15 - 5t & & x = 0 \\ 0 = 15 - 5t & & -15 \\ -15 = -5t & & :-5 \\ 3 = t & & \end{array}$$

Einsetzen von $t = 3$ in die Geradengleichung ergibt den Treffpunkt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{T(0/3/14)}$$