Skalarprodukt und Winkel

1. **Senkrecht.** Welche Zahl muss für w eingesetzt werden, damit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen?

   (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ w \end{pmatrix}$

   Lösung: Schritt 1: Skalarprodukt berechnen.

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ w \end{pmatrix} = 10 - 21 + w = -11 + w$$

   Schritt 2: Skalarprodukt gleich Null setzen und nach w auflösen.

   $$\begin{aligned} -11 + w &= 0 \quad \big| \; +11 \\ w &= \boxed{11} \end{aligned}$$

   (b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ w \end{pmatrix}$

   Lösung: Schritt 1: Skalarprodukt berechnen.

   $$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ w \end{pmatrix} = -12 - 20 - 7w = -7w - 32$$

   Schritt 2: Skalarprodukt gleich Null setzen und nach w auflösen.

   $$\begin{aligned} -7w - 32 &= 0 \quad \big| \; +7w \\ -32 &= 7w \quad \big| \; :7 \\ \boxed{-\tfrac{32}{7}} &= w \end{aligned}$$

   (c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ w \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

   Lösung: Schritt 1: Skalarprodukt berechnen.

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ w \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 - 2w + 28 = 30 - 2w$$

   Schritt 2: Skalarprodukt gleich Null setzen und nach w auflösen.

   $$\begin{aligned} 30 - 2w &= 0 \quad \big| \; +2w \\ 30 &= 2w \quad \big| \; :2 \\ \boxed{15} &= w \end{aligned}$$

   (d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ w \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} w \\ w \\ -4 \end{pmatrix}$

   Lösung: Schritt 1: Skalarprodukt berechnen.

   $$\begin{pmatrix} -2 \\ w \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} w \\ w \\ -4 \end{pmatrix} = -2w + w^2 - 8 = w^2 - 2w - 8$$

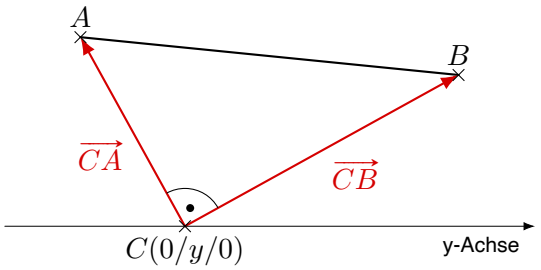
Schritt 2: Skalarprodukt gleich Null setzen und nach w auflösen.

$$\begin{aligned} w^2 - 2w - 8 &= 0 \\ (w+2)(w-4) &= 0 \end{aligned} \quad \Big| \quad \text{Zweiklammeransatz}$$

$$\boxed{w_1 = -2 \qquad w_2 = 4}$$

2. **Rechtwinkliges Dreieck.** Wie muss der Punkt C auf der y-Achse gewählt werden, damit Dreieck $\triangle ABC$ bei C einen rechten Winkel hat?

$A(4/2/8)$ $B(6/5/-3)$



Lösung: Der Punkt C hat die Koordinaten $C(0/w/0)$ Die Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ müssen senkrecht aufeinander stehen.

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2-w \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5-w \\ -3 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}$ muss Null ergeben:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} &= 0 \\ 4 \cdot 6 + (2-w) \cdot (5-w) + 8 \cdot (-3) &= 0 \\ 24 + (2-w)(5-w) - 24 &= 0 \\ (2-w)(5-w) &= 0 \end{aligned} \quad \Big| \quad \begin{array}{l} \text{Skalarprodukt} \\ \text{ausmultiplizieren} \\ \text{zusammenfassen} \end{array}$$

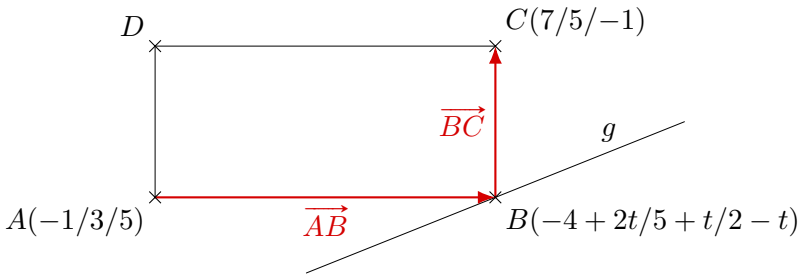
Diese Gleichung hat die Lösungen $w_1 = 2$ und $w_2 = 5$. Damit ergeben sich zwei Lösungen für den Punkt C:

$\boxed{C_1(0/2/0)}$ $\boxed{C_2(0/5/0)}$

3. **Rechteck.** Die Punkte $A(-1/3/-5)$ und $C(7/5/-1)$ sind Ecken eines Rechtecks. Die Ecke B liegt auf der Geraden

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wie lauten die Koordinaten der Ecken B und D?



Lösung: Schritt 1: Ortsvektor von B bestimmen. Da B auf der Geraden g liegt, müssen die Komponenten von $\overrightarrow{OB}$ die Geradengleichung erfüllen, also:

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2t \\ 5+t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CB}$ bestimmen.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4+2t \\ 5+t \\ 2-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ t+2 \\ -t+7 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4+2t \\ 5+t \\ 2-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t+11 \\ -t \\ t-3 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Parameter t bestimmen. Hier wird die Bedingung verwendet, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CB}$ senkrecht aufeinander stehen. Also muss ihr Skalarprodukt gleich Null sein.

$$\begin{array}{rl} \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CB} = 0 & \\ \begin{pmatrix} 2t-3 \\ t+2 \\ -t+7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2t+11 \\ -t \\ t-3 \end{pmatrix} = 0 & \text{Skalarprodukt} \\ (2t-3)(-2t+11) + (t+2)(-t) + (-t+7)(t-3) = 0 & \text{ausmultiplizieren} \\ -6t^2 + 36t - 54 = 0 & : (-6) \\ t^2 - 6t + 9 = 0 & \text{Binom} \\ (t-3)^2 = 0 & \sqrt{\ } \\ t = 3 & \end{array}$$

Schritt 4: Parameter $t = 3$ in Geradengleichung einsetzen, um Punkt B zu bestimmen.

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

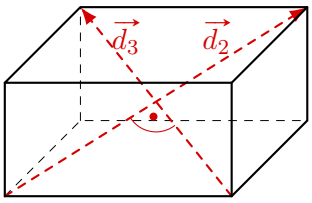
Schritt 5: Punkt D bestimmen. Dazu wird die Vektoraddition verwendet.

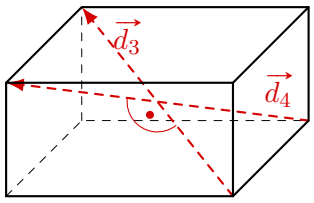
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 11 \\ -3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten der Punkte B und D lauten

$$\boxed{B(2/8/-1)} \qquad \boxed{D(4/0/-5)}$$

4. **Quader.** Ein Quader hat eine Grundfläche von 2×3. Wie muss die Höhe h gewählt werden, damit sich die Raumdiagonalen senkrecht schneiden?





Lösung: Die Raumdiagonalen haben die folgende Vektordarstellung:

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ h \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ h \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ h \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{d_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ h \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zunächst werden $\vec{d_3}$ und $\vec{d_4}$ betrachtet. Sie stehen senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist, also

$$\begin{aligned} \vec{d_3} \circ \vec{d_4} &= 0 && \text{einsetzen} \\ \begin{pmatrix} -3 \\ h \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ h \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 && \text{Skalarprodukt} \\ (-3) \cdot (-3) + h \cdot h + (-2) \cdot 2 &= 0 && \text{ausmultiplizieren} \\ 9 + h^2 - 4 &= 0 && -5 \\ h^2 &= -5 \end{aligned}$$

Diese beiden Raumdiagonalen können also nie senkrecht aufeinander stehen. Nun werden $\vec{d_2}$ und $\vec{d_3}$ betrachtet.

$$\begin{aligned} \vec{d_2} \circ \vec{d_3} &= 0 && \text{einsetzen} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ h \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ h \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 && \text{Skalarprodukt} \\ 3 \cdot (-3) + h \cdot h + (-2) \cdot (-2) &= 0 && \text{ausmultiplizieren} \\ -9 + h^2 + 4 &= 0 && +5 \\ h^2 &= 5 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Höhe die beiden Lösungen $h = \pm\sqrt{5}$. Die negative Lösung entsteht, wenn der Vektor von Oben nach Unten zeigt.

Der Quader muss also eine Höhe von $\boxed{h = \sqrt{5}}$ haben, damit je zwei Raumdiagonalen senkrecht aufeinander stehen.

5. Winkel. Wie gross ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 2 = 12 - 7 + 10 = 15$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 49 + 4} = \sqrt{89}$$
$$\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{15}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{89}} \approx 0.290 = \cos(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi \approx 73.1^\circ}$$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 12 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-8) = 72 + 0 - 32 = 40$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 9 + 16} = \sqrt{169} = 13$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 0^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 0 + 64} = \sqrt{100} = 10$$
$$\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{40}{13 \cdot 10} \approx 0.308 = \cos(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi \approx 72.1^\circ}$$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 3 \cdot 8 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 12 = 24 - 4 + 0 = 20$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{8^2 + 1^2 + 12^2} = \sqrt{64 + 1 + 144} = \sqrt{209}$$
$$\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{20}{5 \cdot \sqrt{209}} \approx 0.277 = \cos(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi \approx 73.9^\circ}$$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) = 0 + 0 + 3 = 3$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{0 + 0 + 9} = \sqrt{9} = 3$$
$$\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} \approx 0.707 = \cos(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi = 45^\circ}$$

(e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 9 \cdot (-2) = 10 + 8 - 18 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi = 90^\circ}$$

(f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= (-5) \cdot 2 + 3 \cdot 8 + 9 \cdot (-1) = -10 + 24 - 9 = 5 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 9 + 81} = \sqrt{115} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{2^2 + 8^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 64 + 1} = \sqrt{69} \end{aligned}$$

$$\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{69}} \approx 0.0561 = \cos(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi = 86.8^\circ}$$

6. Winkel. Wie gross ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$?

(a) $A(5/7/3) \qquad B(-3/3/4) \qquad C(2/-3/6) \qquad D(3/-1/4)$

Lösung:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD} &= (-8) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = -18 \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9 \\ |\overrightarrow{CD}| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

$$\frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{-18}{9 \cdot 3} = -\frac{2}{3} = \cos(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi \approx 131.810^\circ}$$

(b) $A(0/3/6) \qquad B(1/-4/5) \qquad C(7/9/-7) \qquad D(4/6/-4)$

Lösung:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD} &= 1 \cdot (-3) + (-7) \cdot (-3) + (-1) \cdot 3 = 15 \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{1^2 + (-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{51} \\ |\overrightarrow{CD}| &= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} \end{aligned}$$

$$\frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{15}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{27}} \approx 0.404 = \cos(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi \approx 66.157^\circ}$$

(c) $A(4/-1/3)$ $B(6/-2/1)$ $C(6/1/-3)$ $D(13/-3/1)$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD} = 2 \cdot 7 + (-1) \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 = 10$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$\frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{10}{3 \cdot 9} = \frac{10}{27} = \cos(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi \approx 68.262^\circ}$$

7. **Winkel mit Koordinatenachsen.** Welchen Winkel bildet der Vektor $\vec{a}$ mit den Koordinatenachsen?

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Lösung: Die Länge von $\vec{a}$ ist:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 9 + 36} = \sqrt{81} = 9$$

Winkel mit x-Achse ($\vec{e_1}$):

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{e_1}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e_1}|}\right) = \arccos\left(\tfrac{6}{9}\right) = \arccos(\tfrac{2}{3}) \approx \boxed{48.190^\circ}$$

Winkel mit y-Achse ($\vec{e_2}$):

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{e_2}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e_2}|}\right) = \arccos\left(\tfrac{-3}{9}\right) = \arccos(-\tfrac{1}{3}) \approx \boxed{109.471^\circ}$$

Winkel mit z-Achse ($\vec{e_3}$):

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{e_3}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e_3}|}\right) = \arccos\left(\tfrac{-6}{9}\right) = \arccos(-\tfrac{2}{3}) \approx \boxed{131.810^\circ}$$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung: Die Länge von $\vec{a}$ ist:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 144 + 16} = \sqrt{169} = 13$$

Winkel mit x-Achse ($\vec{e_1}$):

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{e_1}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e_1}|}\right) = \arccos\left(\tfrac{-3}{13}\right) \approx \boxed{103.342^\circ}$$

Winkel mit y-Achse ($\vec{e_2}$):

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{e_2}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e_2}|}\right) = \arccos\left(\tfrac{12}{13}\right) \approx \boxed{22.620^\circ}$$

Winkel mit z-Achse ($\vec{e_3}$):

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{e_3}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e_3}|}\right) = \arccos\left(\tfrac{4}{13}\right) \approx \boxed{72.080^\circ}$$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: Die Länge von $\vec{a}$ ist:

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}$$

Winkel mit x-Achse ($\vec{e_1}$):

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{e_1}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e_1}|}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) \approx \boxed{29.21^\circ}$$

Winkel mit y-Achse ($\vec{e_2}$):

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{e_2}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e_2}|}\right) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{21}}\right) \approx \boxed{115.88^\circ}$$

Winkel mit z-Achse ($\vec{e_3}$):

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{e_3}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e_3}|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\right) \approx \boxed{77.40^\circ}$$

8. Dreieck. Wie lauten die Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$?

(a) $A(-1/3/7)$ $B(-5/4/3)$ $C(6/-5/-4)$

Lösung: Schritt 1: Bestimmen der Seitenvektoren.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Berechnen der Längen der Seitenvektoren.

$$|a| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{11^2 + (-9)^2 + (-7)^2} = \sqrt{121 + 81 + 49} = \sqrt{251}$$
$$|b| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-7)^2 + 8^2 + 11^2} = \sqrt{49 + 64 + 121} = \sqrt{234}$$
$$|c| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 1 + 16} = \sqrt{33}$$

Schritt 3: Nun können die Winkel mit Hilfe des Skalarprodukts berechnet werden. Dabei muss beachtet werden, dass die Vektoren immer vom Scheitelpunkt des Winkels

ausgehen müssen.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{|b| \cdot |c|} = \frac{(-4)\cdot 7 + 1\cdot(-8) + (-4)\cdot(-11)}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{33}} = \frac{-28-8+44}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{33}} \approx 0.091$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{33}}\right) \approx \boxed{84.777^\circ}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|c| \cdot |a|} = \frac{4\cdot 11 + (-1)\cdot(-9) + 4\cdot(-7)}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{251}} = \frac{44+9-28}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{251}} \approx 0.275$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{25}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{251}}\right) \approx \boxed{74.056^\circ}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx \boxed{21.167^\circ}$$

(b) $A(2/1/-3)$ $B(-3/0/1)$ $C(7/-1/-1)$

Lösung: Schritt 1: Bestimmen der Seitenvektoren.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}7\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-1\\-2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-10\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\2\\-2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Schritt 2: Berechnen der Längen der Seitenvektoren.

$$|a| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{100+1+4} = \sqrt{104}$$

$$|b| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4+4} = \sqrt{33}$$

$$|c| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42}$$

Schritt 3: Nun können die Winkel mit Hilfe des Skalarprodukts berechnet werden. Dabei muss beachtet werden, dass die Vektoren immer vom Scheitelpunkt des Winkels ausgehen müssen.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{|b| \cdot |c|} = \frac{(-5)\cdot 5 + (-1)\cdot(-2) + 4\cdot 2}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{42}} = \frac{-25+2+8}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{42}} \approx -0.403$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-15}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{42}}\right) \approx \boxed{113.760^\circ}$$

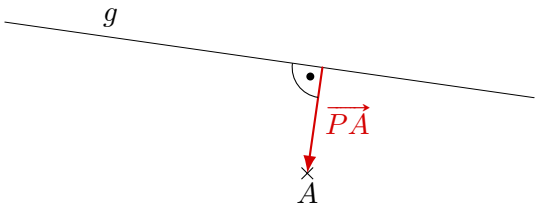
$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|c| \cdot |a|} = \frac{5\cdot 10 + 1\cdot(-1) + (-4)\cdot(-2)}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{104}} = \frac{50-1+8}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{104}} \approx 0.862$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{57}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{251}}\right) \approx \boxed{30.407^\circ}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx \boxed{35.833^\circ}$$

9. Abstand. Wie gross ist der Abstand des Punktes $A(3/4/5)$ von der Geraden g?

$$g: \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$



Lösung: Zunächst muss der Punkt P auf der Geraden gesucht werden, welcher am nächsten bei A liegt. Dabei gilt, dass der Vektor $\overrightarrow{PA}$ senkrecht zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ der Geraden steht. Der Vektor $\overrightarrow{PA}$ lautet wie folgt:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1+2t\\7-t\end{pmatrix}$$

Dass $\overrightarrow{PA}$ senkrecht auf $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ steht, bedeutet, dass deren Skalarprodukt gleich Null sein muss:

$$\begin{array}{rl}
\overrightarrow{PA} \circ \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = 0 & \text{einsetzen} \\
\begin{pmatrix}2\\1+2t\\7-t\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = 0 & \text{Skalarprodukt} \\
2 \cdot 0 + (1+2t) \cdot (-2) + (7-t) \cdot 1 = 0 & \text{ausmultiplizieren} \\
-2 - 4t + 7 - t = 0 & \text{zusammenfassen} \\
5 - 5t = 0 & +5t \\
5 = 5t & : 5 \\
1 = t &
\end{array}$$

Nun wird $t = 1$ in der Geradengleichung eingesetzt, um den Ortsvektor von P zu ermitteln:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Jetzt kann der Vektor $\overrightarrow{PA}$ berechnet werden:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$$

Der Abstand entspricht des Länge dieses Vektors:

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$

Der Abstand des Punkts A von der Geraden beträgt also $\boxed{7}$.

10. Flugzeug. Ein Flugzeug fliegt auf geradem Weg und mit konstanter Geschwindigkeit von Punkt $A(2/1/4)$ zu Punkt $B(5/2/2)$ und benötigt dafür eine Minute. Dabei gibt die y-Koordinate die Höhe über dem Boden an. Die Koordinaten werden in km angegeben.

In welchem minimalen Abstand fliegt das Flugzeug an der Bergspitze mit den Koordinaten $S(10/3/3)$ vorbei?

Lösung: Der Richtungsvektor des Flugzeugs ist $\overrightarrow{AB}$, also:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug fliegt auf der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dazu wird der Punkt P auf g gesucht, welcher am nächsten bei S liegt. Der Vektor $\overrightarrow{PS}$ lautet:

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 8-3t \\ 2-t \\ -1+2t \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{SP}$ muss senkrecht auf den Richtungsvektor von g stehen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8-3t \\ 2-t \\ -1+2t \end{pmatrix} = 0 \quad \left| \text{ Skalarprodukt} \right.$$

$$3 \cdot (8-3t) + 1 \cdot (2-t) - 2 \cdot (-1+2t) = 0 \quad \left| \text{ ausmultiplizieren} \right.$$

$$24 - 9t + 2 - t + 2 - 4t = 0 \quad \left| \text{ zusammenfassen} \right.$$

$$28 - 14t = 0 \quad \left| +14t \right.$$

$$28 = 14t \quad \left| : 14 \right.$$

$$2 = t$$

Nun kann $\overrightarrow{PS}$ ermittelt werden:

$$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 8-3t \\ 2-t \\ -1+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \cdot 2 \\ 2-2 \\ -1+2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Länge von $\overrightarrow{PS}$ beträgt:

$$|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3.6056$$

Das Flugzeug fliegt mit einem minimalen Abstand von $\boxed{3.6\,\text{km}}$ an der Bergspitze vorbei.