Ebenen

1. **Ebenengleichung.** Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene, welche durch den Punkt P geht und senkrecht zum Vektor $\vec{n}$ steht?

   (a) $P(2/-3/-1)$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

   Lösung: Die Normalengleichung der Ebene lautet:

   $$\begin{aligned} \vec{n} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \overrightarrow{OP} \right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \\ z+1 \end{pmatrix} &= 0 \\ 1 \cdot (x-2) - 2 \cdot (y+3) + 4 \cdot (z+1) &= 0 \\ x - 2 - 2y - 6 + 4z + 4 &= 0 \\ x - 2y + 4z - 4 &= 0 \end{aligned}$$

   $$\boxed{x - 2y + 4z - 4 = 0}$$

   (b) $P(2/0/5)$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

   Lösung: Die Normalengleichung der Ebene lautet:

   $$\begin{aligned} \vec{n} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \overrightarrow{OP} \right) &= 0 && \text{einsetzen} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) &= 0 && \text{Vektorsubtraktion} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-5 \end{pmatrix} &= 0 && \text{Skalarprodukt} \\ 5 \cdot (x-2) + 3 \cdot y - 4 \cdot (z-5) &= 0 && \text{ausmultiplizieren} \\ 5x - 10 + 3y - 4z + 20 &= 0 && \text{zusammenfassen} \\ 5x + 3y - 4z + 10 &= 0 \end{aligned}$$

   $$\boxed{5x + 3y - 4z + 10 = 0}$$

2. **Ebenengleichung 2.** Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene, welche durch den Punkt P geht und senkrecht zur Geraden g steht?

   (a) $P(-6/10/16)$ $\quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

   Lösung: Der Normalenvektor ist der Richtungsvektor der Gerade. Die Normalen-

gleichung der Ebene lautet also:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \overrightarrow{OP} \right) &= 0 && \text{einsetzen} \\
\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \right) &= 0 && \text{Vektorsubtraktion} \\
] \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x+6 \\ y-10 \\ z-16 \end{pmatrix} &= 0 && \text{Skalarprodukt} \\
] -8 \cdot (x+6) + 4 \cdot (y-10) + 8 \cdot (z-16) &= 0 && \text{ausmultiplizieren} \\
-8x - 48 + 4y - 40 + 8z - 128 &= 0 && \text{zusammenfassen} \\
-8x + 4y + 8z - 216 &= 0 && : (-4) \\
2x - y - 2z + 54 &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{2x - y - 2z + 54 = 0}$$

(b) $P(5/3/1)$ $\quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: Der Normalenvektor ist der Richtungsvektor der Gerade. Die Normalengleichung der Ebene lautet also:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \overrightarrow{OP} \right) &= 0 && \text{einsetzen} \\
\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= 0 && \text{Vektorsubtraktion} \\
\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix} &= 0 && \text{Skalarprodukt} \\
2 \cdot (x-5) - 2 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-1) &= 0 && \text{ausmultiplizieren} \\
2x - 10 - 2y + 6 + z - 1 &= 0 && \text{zusammenfassen} \\
2x - 2y + z - 5 &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{2x - 2y + z - 5 = 0}$$

3. **Ebenengleichung.** Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene, welche durch den Punkt P geht und parallel zur Ebene E ist?

(a) $P(2/2/-2)$ $\quad E: \; x - 2y - 3z = 0$

Lösung:

$$x - 2y - 3z - 4 = 0$$

(b) $P(6/7/-5)$ $\quad E: \; 5x - 3y + z - 7 = 0$

Lösung:

$$5x - 3y + z - 4 = 0$$

4. **Schnittwinkel.** Unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die Ebene E?

(a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E: \; x + y + 2z - 11 = 0$

Lösung: Es muss der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und dem Richtungsvektor der Geraden $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} |\vec{n}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5} \\ \vec{n} \circ \vec{a} &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3 \end{aligned}$$

Der gesuchte Schnittwinkel ist:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\vec{n} \circ \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}}\right) \approx \boxed{33.2109^\circ}$$

(b) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E: \; x - 4z - 5 = 0$

Lösung: Es muss der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und dem Richtungsvektor der Geraden $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} |\vec{n}| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{7^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{54} \\ \vec{n} \circ \vec{a} &= 1 \cdot 7 + 0 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Der gesuchte Schnittwinkel ist:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\vec{n} \circ \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{54}}\right) \approx \boxed{5.6824^\circ}$$

5. Schnittpunkt. Wie lautet der Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene E?

(a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E: \; 3x - y + 4z - 15 = 0$

Lösung: $\boxed{S(2/-1/2)}$

(b) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E: \; 5x + 6y - 2z - 20 = 0$

Lösung: $\boxed{S(4/0/0)}$

(c) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad E: \; 4y - 3z + 27 = 0$

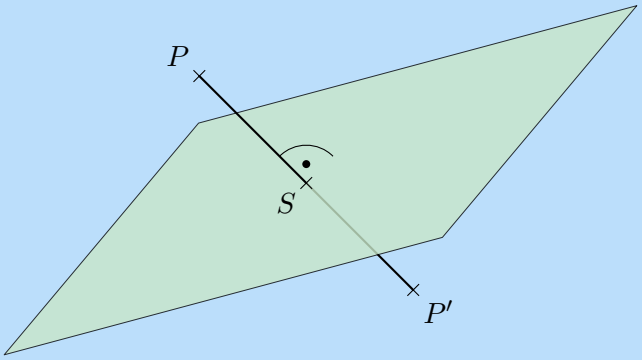
Lösung: Es gibt keine Lösung, d.h. die Gerade und die Ebene sind parallel.

(d) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E: \; x - 2y + 3z - 4 = 0$

Lösung: $\boxed{S(-3/13/11)}$

6. **Spiegelung eines Punkts.** Der Punkt $P(0/8/-7)$ wird an der Ebene $x - 2y + 3z - 5 = 0$ gespiegelt. Wie lauten die Koordinaten des Spiegelpunkts P'?

Lösung: Die Gerade, welche durch P und P' geht, steht senkrecht auf der Ebene. Der Schnittpunkt S der Geraden PP' mit der Ebene ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PP'}$.



Die Gerade PP' steht senkrecht auf die Ebene. Das bedeutet, dass der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Ebene auch der Richtungsvektor der Geraden ist. Die Parametergleichung der Geraden lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 8-2t \\ -7+3t \end{pmatrix}$$

Die Gerade wird mit der Ebene geschnitten:

$x - 2y + 3z - 5 = 0$	Gerade einsetzen
$t - 2(8 - 2t) + 3(-7 + 3t) - 5 = 0$	ausmultiplizieren
$t - 16 + 4t - 21 + 9t - 5 = 0$	zusammenfassen
$14t - 42 = 0$	$+42$
$14t = 42$	$: 14$
$t = 3$	

Der Schnittpunkt S der Gerade $\overline{PP'}$ ist also um den Vektor $3 \cdot \vec{n}$ von P entfernt. Folglich ist P' um $6 \cdot \vec{n}$ von P entfernt.

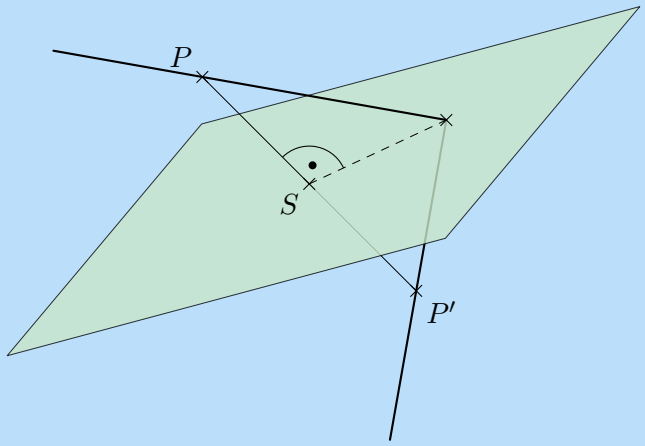
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 6 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunkt hat die Koordinaten $\boxed{P'(6/-4/11)}$.

7. **Spiegelung einer Geraden.** Die Gerade g wird an der Ebene E gespiegelt. Wie lautet die Parametergleichung der gespiegelten Geraden?

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad E: x - 3y - 2z + 42 = 0$$

Lösung:



Die Spiegelgerade ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8. **Punkte in Ebene.** Liegen die folgenden Punkte in der Ebene $2x + 3y - 3z + 1 = 0$?

   (a) $A(0/2/2)$

   Lösung: Die Koordinaten des Punkts werden in die Ebenengleichung eingesetzt.

   $$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z + 1 &= 0 && \text{einsetzen} \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 1 &= 0 && \text{ausrechnen} \\ 6 - 6 + 1 &= 0 && \text{ausrechnen} \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

   Die Gleichung ist falsch, A liegt nicht in der Ebene.

   (b) $B(4/1.5/4.5)$

   Lösung: Die Koordinaten des Punkts werden in die Ebenengleichung eingesetzt.

   $$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z + 1 &= 0 && \text{einsetzen} \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1.5 - 3 \cdot 4.5 + 1 &= 0 && \text{ausrechnen} \\ 8 + 4.5 - 13.5 + 1 &= 0 && \text{ausrechnen} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

   Die Gleichung ist korrekt, B liegt in der Ebene.

9. **Spurpunkte.** Wie lauten die Koordinaten der Spurpunkte der Ebene $3x - 2y + 4z - 10 = 0$? Die Spurpunkte sind die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen.

Lösung: Um den Schnittpunkt mit der x-Achse zu bestimmen, werden y und z gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z - 10 &= 0 \quad \big| \; y = 0 \text{ und } z = 0 \\ 3x - 10 &= 0 \quad \big| \; +10 \\ 3x &= 10 \quad \big| \; :3 \\ x &= \tfrac{10}{3} \end{aligned}$$

Für den Schnittpunkt mit der y-Achse werden x und z gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z - 10 &= 0 \quad \big| \; x = 0 \text{ und } z = 0 \\ -2y - 10 &= 0 \quad \big| \; +2y \\ -10 &= 2y \quad \big| \; :2 \\ -5 &= y \end{aligned}$$

Für den Schnittpunkt mit der z-Achse werden x und y gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z - 10 &= 0 \quad \big| \; x = 0 \text{ und } y = 0 \\ 4z - 10 &= 0 \quad \big| \; +10 \\ 4z &= 10 \quad \big| \; :4 \\ z &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Damit lauten die Spurpunkte der Ebene:

$$S_x\left(\tfrac{10}{3}/0/0\right) \qquad S_y(0/-5/0) \qquad S_z(0/0/2.5)$$

10. Spurgeraden. Wie lauten die Parametergleichungen der drei Spurgeraden der Ebene? Die Spurgeraden sind die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen.

(a) $3x - 2y + 4z - 10 = 0$

Lösung: Es handelt sich um die gleiche Ebene wie in der vorangehenden Aufgabe. Deshalb können hier gleich die Schnittpunkte mit den Achsen verwendet werden. So liegen beispielsweise die Schnittpunkte mit der x- und y-Achse auf der Schnittgeraden der Ebene mit der xy-Ebene.

$$\begin{aligned} s_{xy} &: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.\overline{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3.\overline{3} \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ s_{yz} &: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \\ s_{xz} &: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.\overline{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3.\overline{3} \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) $2x + 3y - 3z + 1 = 0$

Lösung: Am einfachsten werden zunächst die Schnittpunkte mit den Achsen bestimmt.

$$S_x(-0.5/0/0) \qquad S_y\left(0/-0.\overline{3}/0\right) \qquad S_y\left(0/0/0.\overline{3}\right)$$

Nun können aus den Punkten die Schnittgeraden konstruiert werden:

$$s_{xy}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.\overline{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{yz}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.\overline{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0.\overline{3} \\ 0.\overline{3} \end{pmatrix}$$

$$s_{xz}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.\overline{3} \end{pmatrix}$$