# Musterprobe Vektorgeometrie 2

**Beachten Sie:**

- Sie haben 80 Minuten Zeit.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Sie dürfen den Taschenrechner und das Fundamentum verwenden.
- Runden Sie auf vier Dezimalstellen.

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 5 | 5 | 4 | 6 | 10 | 30 | |
| Punkte | | | | | | | |

**1. Lage von Geraden.** Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden $g$ und $h$. Geben Sie die Koordinaten eines allfälligen Schnittpunkts an. (5P)

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Lösungsweg: Vorgehen gemäss Skript Abschnitt 2.5.

Die Geraden schneiden sich, der Schnittpunkt ist $\boxed{S(-3/2/-1)}$.

**2. Abstand Punkt – Gerade.** Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Punkt $P$ und der Geraden $g$. (5P)

$$P(1/-3/-3) \qquad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Der Abstand beträgt $\boxed{\sqrt{6}}$.

**3. Ebene.** Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, welche durch den Punkt $A$ verläuft und senkrecht zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht. (4P)

$$A(4/-2/-2) \qquad B(6/-1/3)$$

**Lösung:**

1. Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ bestimmen. **2P**

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Normalengleichung der Ebene mit $\vec{n}$ und einem Punkt (z.B. $A$) aufstellen. **1P**
3. Gleichung ausrechnen und vereinfachen. **2P**

$$\begin{array}{rr|l} & \vec{n} \circ \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \overrightarrow{OA} \right) = 0 & \\ \iff & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x-4 \\ y+2 \\ z+2 \end{pmatrix} = 0 & \\ \iff & 2(x-4) + 1 \cdot (y+2) + 5 \cdot (z+2) = 0 & \\ \iff & 2x - 8 + y + 2 + 5z + 10 = 0 & \\ \iff & 2x + y + 5z + 4 = 0 & \end{array}$$

Die Ebenengleichung lautet $\boxed{2x + y + 5z + 4 = 0}$.

**4. Schnitt Gerade – Ebene.** Gegeben ist eine Gerade $g$ und eine Ebene $E$. **(6P)**

$$E: \; x + y - 2z + 3 = 0 \qquad\qquad g: \; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Koordinaten des Schnittpunkts zwischen $g$ und $E$. (3P)

**Lösung:** Lösungsweg:

1. Geradengleichung nach Komponenten auflösen.

$$x = 3 + t \qquad\qquad y = 4 + t \qquad\qquad z = 9 + 3t$$

2. Komponenten der Geradengleichung in Ebenengleichung einsetzen. **1P**
3. Gleichung nach $t$ auflösen. **1P**

$$\begin{array}{rr|l} & x + y - 2z + 3 = 0 & \\ \iff & (3+t) + (4+t) - 2(9+3t) + 3 = 0 & \\ \iff & 2t + 10 - 18 - 6t = 0 & \\ \iff & -4t - 8 = 0 & +4t \\ \iff & -8 = 4t & :4 \\ \iff & -2 = t & \end{array}$$

4. $t = -2$ in Geradengleichung einsetzen, um Koordinaten von $S$ zu bestimmen. **1P**

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-2 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt lautet $\boxed{S(1/2/3)}$.

(b) Bestimmen Sie den Winkel, welcher die Gerade $g$ mit der Ebene $E$ bildet. (3P)

**Lösung:** Lösungsweg:

1. Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden bestimmen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene bestimmen.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Skalarprodukt und Beträge berechnen: **1P**

$$\vec{a} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -4$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

4. Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{n}$ berechnen. **1P**
5. Gegenwinkel verwenden (d.h. $\sin^{-1}$ statt $\cos^{-1}$ oder $90° - \varphi$. **1P**

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}}\right) \approx \sin^{-1}(-0.4923) = -29.50°$$

Der Winkel beträgt $\boxed{29.5°}$.

**5. Dreieck.** Gegeben ist die Ebene $E$: **(10P)**

$$E: \; 3x - 4y + z - 12 = 0$$

(a) Geben Sie die Koordinaten der Spurpunkte der Ebene an (d.h. die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen). (3P)

**Lösung:**

**Schnittpunkt mit x-Achse** ($y = 0$, $z = 0$):

$$\begin{array}{rl|} 3x - 4 \cdot 0 + 0 - 12 &= 0 \\ \iff 3x &= 12 \\ \iff x &= 4 \end{array}$$

**Schnittpunkt mit y-Achse** ($x = 0$, $z = 0$):

$$\begin{array}{rl|} 3 \cdot 0 - 4y + 0 - 12 &= 0 \\ \iff -4y &= 12 \\ \iff y &= -3 \end{array}$$

**Schnittpunkt mit z-Achse** ($x = 0$, $y = 0$):

$$\begin{array}{rl|} 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + z - 12 &= 0 \\ \iff z &= 12 \end{array}$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte lauten:

$\boxed{S_x(4/0/0)}$ $\boxed{S_y(0/-3/0)}$ $\boxed{S_z(0/0/12)}$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, welches durch die drei Spurpunkte gebildet wird. (3P)

**Lösung:** Wir berechnen den Flächeninhalt des Dreiecks mit dem Betrag des Kreuzprodukts zweier Vektoren, die von einem Punkt ausgehen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 48 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Fläche des Dreiecks berechnen:

$$\tfrac{1}{2} \cdot |\vec{n}| = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(-36)^2 + 48^2 + (-12)^2} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1296 + 2304 + 144} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3744} \approx 30.5941$$

Die Fläche des Dreiecks beträgt $\boxed{30.5941}$.

(c) Berechnen Sie die Winkel des Dreieck, welches durch die drei Spurpunkte gebildet wird. (4P)

**Lösung:**

**Winkel** $\alpha$ zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \\
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \\
|\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} \\
\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} &= (-4) \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 12 = 16 \\
\alpha &= \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\right) = \arccos\left(\frac{16}{5 \cdot \sqrt{160}}\right) \approx \boxed{75.3459^\circ}
\end{aligned}$$

**Winkel** $\beta$ zwischen $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \\
|\overrightarrow{BA}| &= 5 \\
|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{0^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 144} = \sqrt{153} \\
\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} &= 4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 12 = 9 \\
\alpha &= \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\right) = \arccos\left(\frac{9}{5 \cdot \sqrt{153}}\right) \approx \boxed{81.6325^\circ}
\end{aligned}$$

**Winkel** $\gamma$ :

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = \boxed{23.0216^\circ}$$