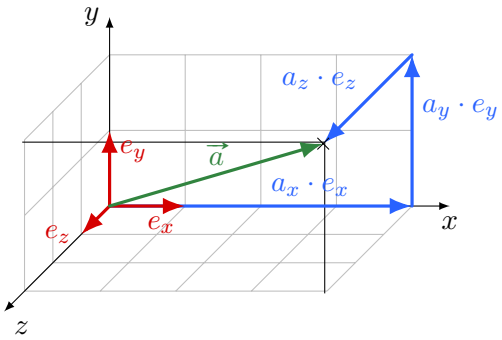
Vektorgeometrie 2

Geraden und Ebenen im Raum

Stefan Rothe

23.07.2026



Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **2**
2 Geraden **7**
3 Winkel zwischen Vektoren **13**
4 Ebenen **16**
5 Vektorprodukt **21**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

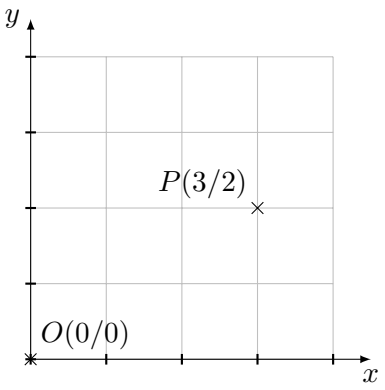
1 Grundlagen

1.1 Dreidimensionaler Raum

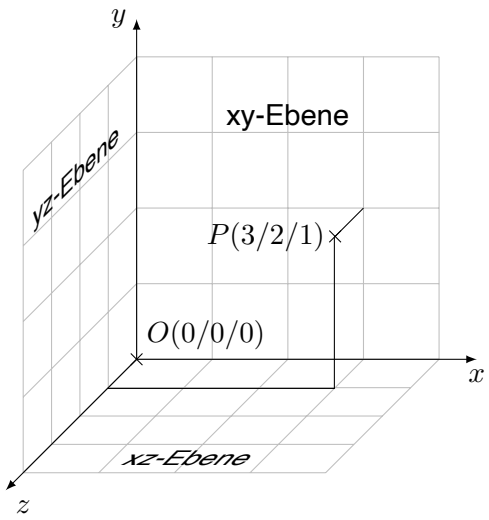
Mit Punkten und Vektoren können auch Situationen im dreidimensionalen Raum beschrieben werden. Dazu wird das kartesische Koordinatensystem um die z-Achse erweitert.

Jeder Punkt hat damit zusätzlich eine z-Koordinate und jeder Vektor eine z-Komponente.

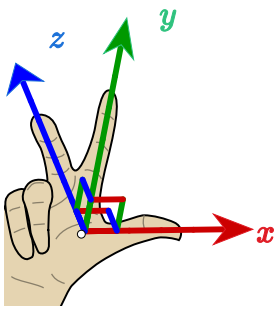
zweidimensionaler Raum



dreidimensionaler Raum



Die z-Achse steht dabei senkrecht auf die x- und y-Achse. Die Achsen bilden ein sogenanntes **Rechtssystem**. Ihre Orientierung kann anhand der Finger der rechten Hand ermittelt werden, wobei der Daumen die x-Achse, der Zeigefinger die y-Achse und der Mittelfinger die z-Achse darstellen.



Das bedeutet, dass die z-Achse nach oben zeigt, wenn die x- und y-Achse wie üblich auf einem Blatt Papier angeordnet sind.

Je zwei Koordinatenachsen liegen zusammen in einer **Koordinatenebene**. So liegen beispielsweise die x- und z-Achse zusammen in der xz-Ebene.

Bei allen Punkten auf einer Koordinatenebene ist die dritte Koordinate gleich Null. So ist beispielsweise bei allen Punkten auf der xz-Ebene die y-Koordinate gleich Null.

1.2 Vektorbegriff

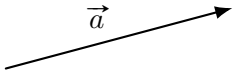
Vektoren sind eine neues Grundelement der Mathematik, welche die Zahlen ergänzen. Im Gegensatz zu Zahlen besitzen Vektoren auch eine **Richtung**.

Ein Vektor kann als Verschiebung interpretiert werden.

1.3 Darstellung

Ein Vektor $\vec{a}$ wird als Pfeil dargestellt und mit einem Kleinbuchstaben mit Pfeil beschriftet. Ein Vektor kann auch durch seine **Komponenten** beschrieben werden.

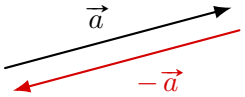
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$



1.4 Gegenvektor

Der Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$ ist der Vektor, der gleich lang ist wie $\vec{a}$ und in die umgekehrte Richtung zeigt. Der Gegenvektor wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.

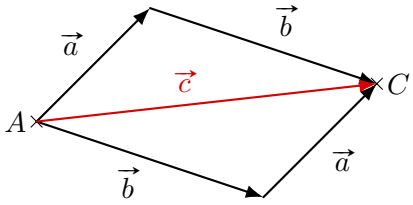
$$-\vec{a} = -\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$$



1.5 Addition

Die Addition von Vektoren ist die Aneinanderreihung von Verschiebungen. Wird ein Punkt P zunächst um den Vektor $\vec{a}$ verschoben und anschliessend um den Vektor $\vec{b}$, so kommt der Punkt bei Q zu liegen. Die gleiche Verschiebung entsteht, wenn der Punkt P um den Vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ verschoben wird:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

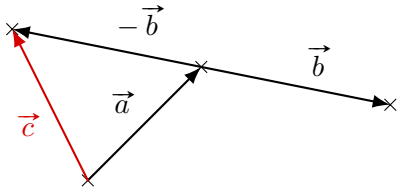


Die Addition von Vektoren ist **kommutativ**. Es spielt keine Rolle, ob der Vektor $\vec{b}$ an den Vektor $\vec{a}$ angehängt wird oder umgekehrt. Als Summe entsteht in beiden Fällen der gleiche Vektor $\vec{c}$. Die beiden Varianten der Addition bilden ein Parallelogramm.

1.6 Subtraktion

Die Subtraktion eines Vektors $\vec{b}$ vom Vektor $\vec{a}$ kann als Addition des Gegenvektors $-\vec{b}$ betrachtet werden:

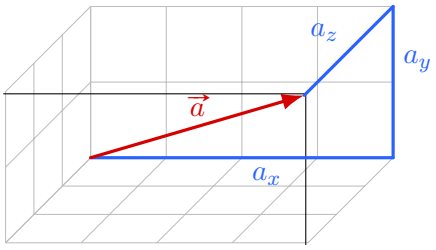
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$



1.7 Länge

Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet. Der Vektor bildet dabei die Raumdiagonale eines Quaders, dessen Seitenlängen den Komponenten des Vektors entsprechen.

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

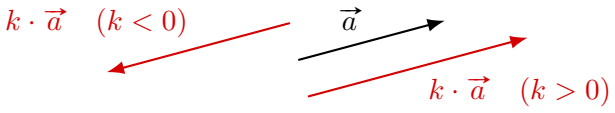


1.8 Skalierung

Ein Vektor $\vec{a}$ kann mit einer Zahl $k \neq 0$ multipliziert werden. Dabei wird jede Komponente des Vektors mit k multipliziert.

Dabei entsteht ein Vektor, welcher parallel zu $\vec{a}$ ist und dessen Länge um den Faktor k multipliziert wurde. Dies wird als **Skalierung** des Vektors bezeichnet.

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ k \cdot a_z \end{pmatrix}$$



Wenn der Faktor k positiv ist, dann zeigt der skalierte Vektor in die gleiche Richtung wie $\vec{a}$. Wenn k negativ ist, zeigt $k \cdot \vec{a}$ in die Gegenrichtung.

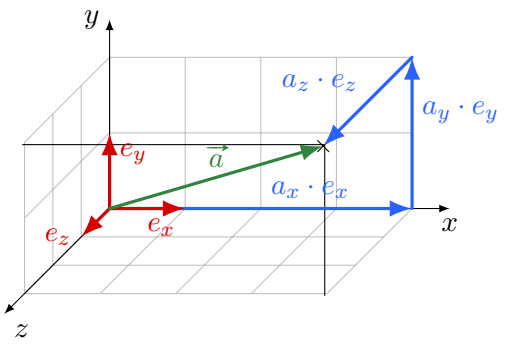
Kollinearität. Wenn sich zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nur durch einen Faktor $k \neq 0$ unterscheiden, dann sind sie **kollinear** oder parallel.

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

1.9 Einheitsvektoren

Die Koordinatenachsen können als Vektoren mit der Länge 1 beschrieben werden. Diese Vektoren werden **Einheitsvektoren** genannt.

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Jeder Vektor $\vec{a}$ kann als eine Addition von Vielfachen der Einheitsvektoren dargestellt werden:

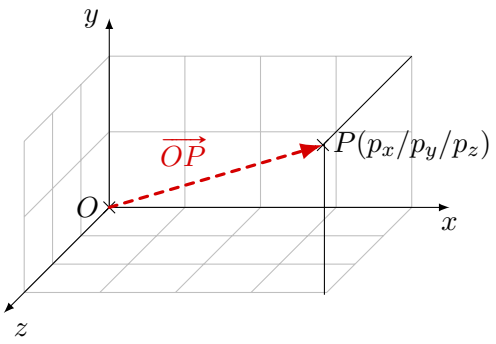
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{e_x} + a_y \cdot \vec{e_y} + a_z \cdot \vec{e_z}$$

Diese Darstellung eines Vektors wird **Linearkombination** genannt.

1.10 Ortsvektor

Wird ein Vektor $\overrightarrow{OP}$ mit dem Ursprung O als Anfangspunkt und dem Punkt $P(x/y)$ als Endpunkt definiert wird, so entsprechen die Komponenten des Vektors gerade den Koordinaten des Punkts $P(p_x/p_y/p_z)$:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$



Dieser Vektor wird **Ortsvektor** des Punkts P genannt. Der Ortsvektor von P zeigt vom Ursprung O zum Punkt P.

Werden Vektoren als Verschiebungen aufgefasst, so verschiebt der Ortsvektor den Ursprung O in den Punkt P.

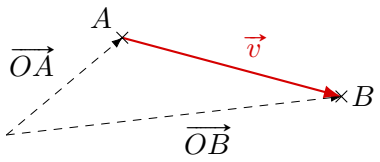
In diesem Skript werden Ortsvektoren eines Punkts P mit $\overrightarrow{OP}$ bezeichnet und als gestrichelte Linien dargestellt.

1.11 Definition durch Endpunkte

Ein Vektor kann durch einen Anfangspunkt $A(a_x/a_y/a_z)$ und einen Endpunkt $B(b_x/b_y/b_z)$ definiert werden.

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ergibt sich aus der Subtraktion des Ortsvektors $\overrightarrow{OB}$ von B vom Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ vom Punkt A. Somit ergeben sich die Komponenten von $\vec{v}$ durch Subtraktion der Koordinaten von End- und Anfangspunkt.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$$



Da der Vektor gerichtet ist, ist die Reihenfolge der Punkte wichtig. Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ ist der Gegenvektor von $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

2 Geraden

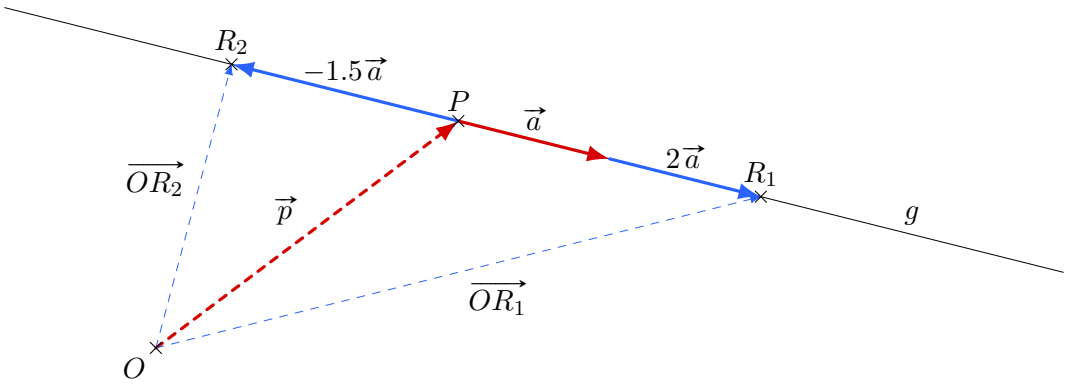
2.1 Parametergleichung der Geraden

Eine Gerade g kann durch die Vektorgleichung

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$$

beschrieben werden. Dabei ist $\overrightarrow{OP}$ der Ortsvektor eines bestimmten **Punktes** P auf der Geraden und $\vec{a}$ ist die **Richtung** der Geraden. Der **Parameter** t ist eine beliebig wählbare, reelle Zahl.

Wird für t eine Zahl eingesetzt, so ergibt sich der Ortsvektor $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ eines Punktes R, welcher auf der Geraden liegt. Da t beliebig gewählt werden kann, können so sämtliche auf der Gerade liegenden Punkte R_i ermittelt werden.



Beispiel. *Gegeben ist die Gerade*

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen von 2 *bzw.* -1.5 *für den Parameter* t *können zwei Ortsvektoren von Punkten* R_1 *und* R_2 *auf der Geraden ermittelt werden.*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 3-1 \\ -1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad R_1(8/2/-7)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 3+0.75 \\ -1+4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.75 \\ 3.5 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad R_2(1/3.75/3.5)$$

2.2 Spurpunkte

Eine Gerade im Raum, welche nicht zufälligerweise parallel zu einer Koordinatenebene liegt, schneidet die drei Koordinatenebenen. Diese Schnittpunkte werden **Spurpunkte** der Geraden genannt, da es die «Spuren» sind, welche die Gerade in der Darstellung des Koordinatensystems hinterlässt.

Die Spurpunkte entsprechen den Schnittpunkten einer Geraden mit den Koordinatenachsen im zweidimensionalen Raum.

Um einen Spurpunkt der Geraden zu bestimmen, wird der Parameter t der Geradengleichung so gewählt, dass eine Koordinate Null ergibt. Mit diesem Parameter kann dann der entsprechende Spurpunkt berechnet werden.

Beispiel. *Gegeben ist die Gerade*

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Um den Spurpunkt S_{xy} auf der xy-Ebene zu bestimmen, wird t so gewählt, dass die z-Koordinate Null wird:

$$3 + t \cdot 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = -0.75$$

Damit ergibt sich: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 0.75 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad S_{xy}(2.5/0.5/0)$

Um den Spurpunkt S_{xz} auf der xz-Ebene zu bestimmen, wird t so gewählt, dass die y-Koordinate Null wird:

$$2 + t \cdot 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = -1$$

Damit ergibt sich: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad S_{xz}(-1/0/-1)$

Um den Spurpunkt S_{yz} auf der yz-Ebene zu bestimmen, wird t so gewählt, dass die z-Koordinate Null wird:

$$1 + t \cdot (-2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 0.5$$

Damit ergibt sich: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad S_{yz}(0/3/5)$

2.3 Gerade durch zwei Punkte

Die Gleichung der Geraden durch die zwei Punkte A und B ergibt sich aus dem Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ und dem Ortsvektors $\overrightarrow{OA}$. Alternativ kann auch der Richtungsvektor $\overrightarrow{BA}$ oder Ortsvektor von B gewählt werden. Die Vektorgleichung der Geraden durch A und B lautet also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

Beispiel. *Die Gleichung der Geraden durch $A(4/0/2)$ und $B(2/2.5/2.5)$ soll bestimmt werden.*

Schritt 1: Der Richtungsvektor der Geraden $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bestimmt. Alternativ könnte auch der Gegenvektor $\overrightarrow{BA}$ verwendet werden.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Der Ortsvektor eines Punkts auf der Geraden wird bestimmt. Hier wird der Punkt A gewählt. Alternativ könnte auch der Punkt B verwendet werden.

$$\vec{p} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Die Geradengleichung wird aus dem Ortsvektor $\vec{p}$ und dem Richtungsvektor $\vec{a}$ zusammengesetzt.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

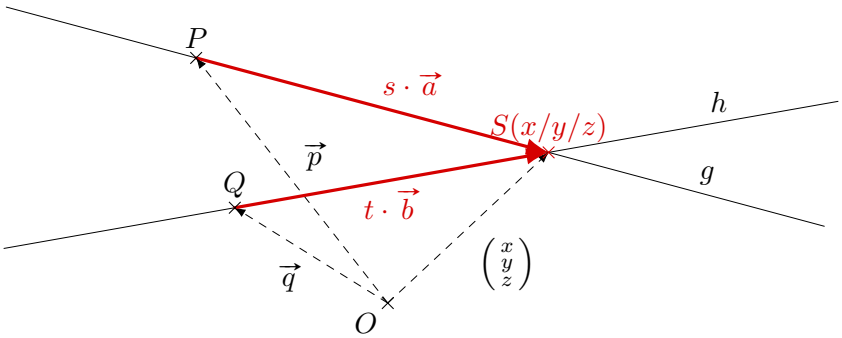
2.4 Schnittpunkt zweier Geraden

Eine typische Grundaufgabe ist, den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen. Als Ausgangslage sind die Geradengleichungen der beiden Geraden gegeben:

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{a} \qquad\qquad h: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{b}$$

Beide Geradengleichungen ergeben durch Einsetzen von Werten für die Parameter s beziehungsweise t Ortsvektoren auf Punkte, welche auf der jeweiligen Gerade liegen.

Das Ziel ist es, Werte für die Parameter s und t zu finden, sodass die Komponenten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der beiden Geradengleichungen gleich werden. Dann geben sie den gemeinsamen Punkt der Geraden, den Schnittpunkt S, an.



Also werden die Geradengleichungen gleichgesetzt:

$$\overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{a} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{b}$$

Diese Gleichung entspricht einem linearen Gleichungssystem, welches für jede Komponente der Vektoren eine Gleichung enthält. Im dreidimensionalen Raum entsteht also ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen s und t.

$$\left|\begin{array}{l} p_x + s \cdot a_x = q_x + t \cdot b_x \\ p_y + s \cdot a_y = q_y + t \cdot b_y \\ p_z + s \cdot a_z = q_z + t \cdot b_z \end{array}\right|$$

Zwei der drei Gleichungen werden benötigt, um die Werte für s und t zu bestimmen. Anschliessend wird überprüft, ob diese Werte auch die dritte Gleichung erfüllen.

Falls das so ist, kann durch Einsetzen von s oder t in die entsprechende Geradengleichung der Schnittpunkt bestimmt werden.

Falls die dritte Gleichung nicht erfüllt wird, bedeutet dies, dass sich die Geraden nicht schneiden.

Beispiel. *Ein allfälliger Schnittpunkt der folgenden beiden Geraden soll bestimmt werden:*

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad h: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Die Geradengleichungen werden gleichgesetzt.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Das entsprechende Gleichungssystem für die Komponenten wird aufgestellt:

$$\left|\begin{array}{l} -2s + 3 = t \quad + 1 \\ \quad s \quad\quad = -t + 1 \\ -2s + 4 = -t + 2 \end{array}\right|$$

Schritt 3: Das Gleichungssystem wird gelöst. Hier werden die zwei ersten Gleichungen verwendet, indem $s = 1 - t$ in der ersten Gleichung eingesetzt wird:

$$\begin{array}{rl|l} -2s + 3 = 1 + t & & s = 1 - t \\ -2(1 - t) + 3 = 1 + t & & \textit{ausmultiplizieren} \\ -2 + 2t + 3 = 1 + t & & -t - 1 \\ t = 0 & & \end{array}$$

Damit ist $s = 1$.

Schritt 4: Dritte Gleichung überprüfen:

$$\begin{array}{rl|l} -2s + 4 = 2 - t & & s = 1, t = 0 \\ -2 + 4 = 2 & & \textit{zusammenfassen} \\ 2 = 2 & & \end{array}$$

Die Gleichung ist korrekt, somit schneiden sich die Geraden.

Schritt 5: Der Schnittpunkt wird bestimmt, indem $t = 0$ in der Gleichung der Geraden h eingesetzt wird. In diesem Fall können die Koordinaten sofort abgelesen werden.

$$S(1/1/2)$$

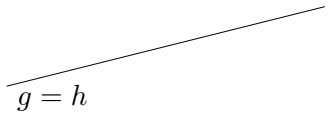
Alternativ kann auch $s = 1$ in der Gleichung der Geraden g eingesetzt werden.

2.5 Gegenseitige Lage

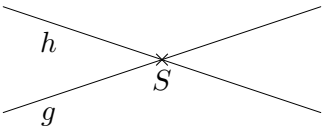
In der Ebene haben zwei Geraden g und h immer eine von drei möglichen Lagen zueinander. Sie können

- **gleich sein.** Beide Geraden haben alle Punkte gemeinsam.
- **sich schneiden.** Die Geraden haben genau einen gemeinsamen Punkt, den **Schnittpunkt** S.
- **parallel sein.** Die Geraden haben keinen gemeinsamen Punkt. Parallele Geraden werden mit zwei kleinen Querstrichen markiert.

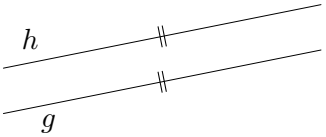
Im Raum ist es möglich, dass keiner dieser Fälle eintritt. In diesem Fall stehen die Geraden **windschief** zueinander.



g und h sind gleich



g und h schneiden sich



g und h sind parallel

Durch beantworten der folgenden zwei Fragen kann die gegenseitige Lage ermittelt werden:

1. Sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden parallel?
2. Besitzen die beiden Geraden einen gemeinsamen Punkt?

Fall	**parallel?**	**gemeinsamer Punkt?**
Geraden sind gleich	ja	ja
Geraden sind parallel	ja	nein
Geraden schneiden sich	nein	ja
Geraden sind windschief	nein	nein

Die Richtungsvektoren sind parallel, falls eine Streckfaktor k gefunden werden kann, sodass

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

Die Frage, ob die Geraden einen gemeinsamen Punkt haben, wird durch das Schneiden der beiden Geraden beantwortet.

Beispiel. *Die gegenseitige Lage der folgenden Geraden soll bestimmt werden:*

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Zunächst wird überprüft, ob die Richtungsvektoren kollinear (parallel) sind:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Es kann kein k gefunden werden, das die Gleichung erfüllt, also sind die Vektoren nicht parallel.

Nun wird ein allfälliger Schnittpunkt bestimmt, indem die Geradengleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem mit zwei Variablen.

$$\left|\begin{array}{rl} -s + 2 = 2t & +2 \\ s + 3 = & 4 \\ -4s + 4 = -4t + 4 & \end{array}\right|$$

Aus der mittleren Gleichung kann $s = 1$ abgelesen werden. In der dritten Gleichung eingesetzt ergibt sich für t:

$$\begin{array}{rl|l} -4s + 4 = 4 - 4t & & s = 1 \\ -4 + 4 = 4 - 4t & & \textit{ausrechnen} \\ 0 = 4 - 4t & & +4t \\ 4t = 4 & & : 4 \\ t = 1 & & \end{array}$$

Nun muss überprüft werden, ob die erste Gleichung ebenfalls erfüllt ist:

$$\begin{array}{rl|l} -s + 2 = 2 + 2t & & s = 1, t = 1 \\ -1 + 2 = 2 + 2 \cdot 1 & & \textit{ausrechnen} \\ 1 = 4 & & \end{array}$$

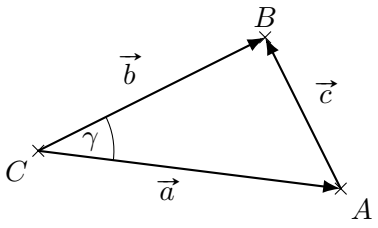
Die erste Gleichung ist falsch, somit existiert kein Schnittpunkt. Folglich liegen die Geraden g und h windschief zueinander.

3 Winkel zwischen Vektoren

3.1 Herleitung aus dem Kosinussatz

In der Vektorgeometrie benötigen wir eine Möglichkeit, Winkel zwischen Vektoren zu berechnen. Ausgehend von Betrachtungen am Dreieck und durch einen Vergleich mit dem Kosinussatz erhalten wir eine Definition für das **Skalarprodukt** von Vektoren, welches diese Möglichkeit bietet.

Zunächst wird das folgende Dreieck betrachtet:



Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden als Komponenten geschrieben. Der Vektor $\vec{c}$ kann aus den anderen berechnet werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$$

Nun werden die Längen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet, welche den Seitenlängen des Dreiecks entsprechen. Um unnötige Wurzeln zu vermeiden, werden die Längen quadriert.

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \qquad |\vec{b}|^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$$

Analog kann die Länge der Seite c aus den Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet werden:

$$\begin{array}{l|l} |\vec{c}|^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2 & \text{ausmultiplizieren} \\ |\vec{c}|^2 = b_x^2 - 2a_xb_x + a_x^2 + b_y^2 - 2a_yb_y + a_y^2 + b_z^2 - 2a_zb_z + a_z^2 & \text{Terme umstellen} \\ |\vec{c}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2a_xb_x - 2a_yb_y - 2a_zb_z & \text{ersetzen} \\ |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2a_xb_x - 2a_yb_y - 2a_zb_z & -2 \text{ ausklammern} \\ |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\left(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\right) & \end{array}$$

Nach einigen Umformungen entsteht eine Gleichung, welche grosse Ähnlichkeit mit dem Kosinussatz hat:

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\gamma)$$

Daraus kann geschlossen werden, dass folgendes gilt:

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\gamma)$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann ausschliesslich aus den Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet werden. Sie wird das Skalarprodukt der beiden Vektoren genannt.

Skalarprodukt. Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist eine Zahl, welche wie folgt berechnet wird:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Beispiel. *Das Skalarprodukt der beiden Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ *beträgt:*

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 4 = -2 - 15 + 4 = -13$$

Aus dem Vergleich mit dem Kosinussatz ergibt sich folgende Beziehung zwischen dem Skalarprodukt und dem Winkel der Vektoren:

Skalarprodukt und Winkel: Für das Skalarprodukt und den von den Vektoren eingeschlossenen Winkel φ gilt folgende Beziehung:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\varphi)$$

3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren

Wird die oben stehende Gleichung umgeformt, so kann damit der Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet werden.

Winkel zwischen zwei Vektoren: Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird wie folgt berechnet:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Beispiel. *Der Winkel zwischen den Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ *soll berechnet werden.*

Zunächst wird das Skalarprodukt der beiden Vektoren berechnet:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 4 = -2 - 15 + 4 = -13$$

Da das Skalarprodukt nicht gleich Null ist, muss der Winkel berechnet werden. Dazu werden als nächstes die Längen der Vektoren ermittelt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 25 + 16} = \sqrt{42}$$

Nun kann der Winkel berechnet werden:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-13}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{42}}\right) \approx \arccos(-0.536) \approx 122.42°$$

3.3 Rechter Winkel

Wenn das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich Null ist, dann ist der Kosinus des Winkels ebenfalls gleich Null. Das bedeutet, dass in diesem Fall der Winkel 90° beträgt und die Vektoren somit in einem rechten Winkel zueinander stehen.

Rechter Winkel. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden genau dann einen rechten Winkel, wenn

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

Beispiel. *Der Winkel zwischen den Vektoren* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ *soll bestimmt werden.*

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 9 \cdot (-2) = 10 + 8 - 18 = 0$$

Da das Skalarprodukt gleich Null ist, stehen die Vektoren senkrecht zueinander.

3.4 Parallelität

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel, wenn Sie in die gleiche oder umgekehrte Richtung zeigen. Das ist genau dann der Fall, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.

Parallelität. Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ sind parallel, wenn es eine Zahl t gibt, sodass

$$\vec{a} = t \cdot \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = t$$

Die Parallelität wird überprüft, indem die Quotienten der x-Komponenten und y-Komponenten der beiden Vektoren gebildet wird. Sind die Verhältnisse gleich, so sind die Vektoren kollinear.

Beispiel. *Die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ *sind parallel, da:*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{2}{-6} = \boxed{\frac{-1}{3}} \qquad = \qquad \frac{a_y}{b_y} = \frac{-1}{3} = \boxed{\frac{-1}{3}} \qquad = \qquad \frac{a_z}{b_z} = \frac{3}{-9} = \boxed{\frac{-1}{3}}$$

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *sind nicht parallel, da*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{2}{1} = \boxed{2} \qquad = \qquad \frac{a_y}{b_y} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \qquad \neq \qquad \frac{a_z}{b_z} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

4 Ebenen

4.1 Normalengleichung der Ebene

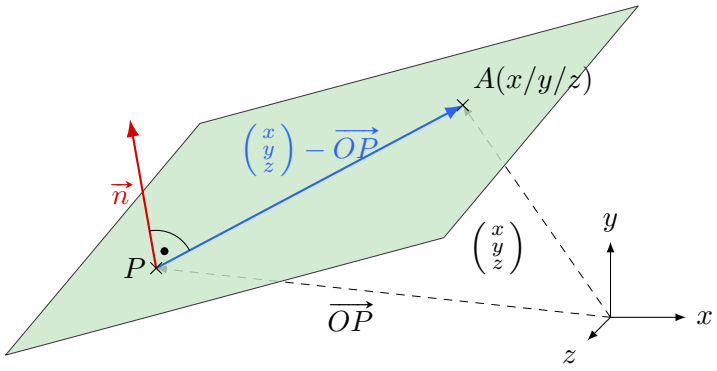
Eine Ebene ist eindeutig festgelegt durch einen Punkt P, welcher in der Ebene liegt sowie einen Vektor $\vec{n}$, welcher senkrecht auf die Ebene steht.

Ein Vektor, welcher senkrecht zu einer Ebene steht, heisst **Normalenvektor** dieser Ebene.

Normalenvektor. Ein Vektor $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E, wenn er senkrecht auf die Ebene steht. Das bedeutet, dass sein Skalarprodukt mit allen Vektoren a, welche in der Ebene liegen, gleich Null ist:

$$\vec{n} \circ \vec{a} = 0$$

Wenn von einer Ebene ein Punkt P und ein Normalenvektor gegeben sind, so steht der Vektor $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}$, der ausgehend von P auf einen beliebigen Punkt A in der Ebene zeigt, senkrecht auf den Normalenvektor.



Dies kann damit ausgedrückt werden, dass das Skalarprodukt von n mit dem Vektor $\overrightarrow{PR}$ gleich Null ist, also $\vec{n} \circ \overrightarrow{PR} = 0$.

Normalengleichung der Ebene. Die Gleichung

$$E\colon \vec{n} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \overrightarrow{OP} \right) = 0$$

stellt eine Ebene E dar. Dabei ist P ein gegebener Punkt der Ebene, $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor der Ebene und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen Punkts der Ebene.

4.2 Koordinatengleichung der Ebene

Beispiel. *Die Ebene E hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt $P(-2/5/3)$. Dann kann E durch die folgende Normalengleichung dargestellt werden:*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Das Skalarprodukt wird ausgerechnet:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x+2) - 5 \cdot (y-5) + 4 \cdot (z-3) &= 0 \\ 2x + 4 - 5y + 25 + 4z - 12 &= 0 \\ 2x - 5y + 4z + 17 &= 0 \end{aligned}$$

Die resultierende Gleichung beschreibt ebenfalls die Ebene E. Alle Lösungen der Gleichung sind Koordinaten von Punkten in E. Es fällt auf, dass vor den Variablen die jeweiligen Komponenten des Normalenvektors stehen.

Koordinatengleichung der Ebene. Ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E, so hat die Ebene E die Koordinatengleichung

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z + k = 0$$

Dabei ist k eine konstante Zahl und x, y, z sind die Koordinaten eines beliebigen Punkts der Ebene.

Beispiel. *Eine Ebene E hat die Koordinatengleichung*

$$E\colon \quad 4x + 2y + 6z + 7 = 0$$

Gesucht ist die z-Koordinate des Punkts $P(1/2/z)$, sodass P in der Ebene liegt. x und y werden in die Koordinatengleichung eingesetzt und diese nach der z-Koordinaten aufgelöst.

$4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 6z + 7 = 0$	*ausrechnen*
$15 + 6z = 0$	-15
$6z = -15$	$: 6$
$z = -2.5$	

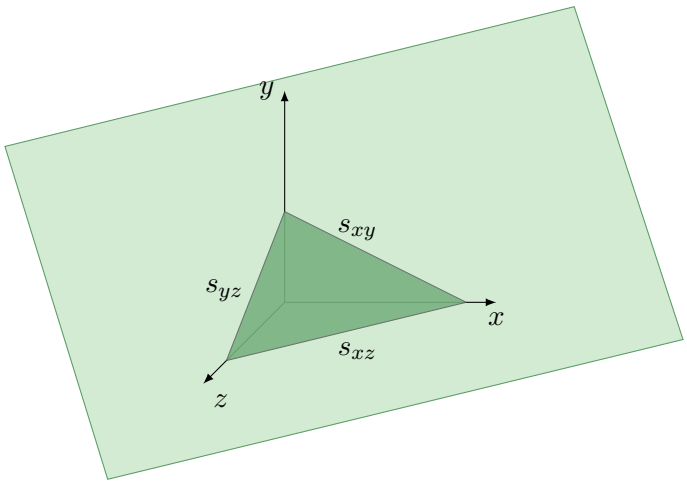
Also liegt der Punkt $P(1/2/-2.5)$ in der Ebene.

4.3 Spurpunkte und Spurgeraden

Eine Ebene, welche nicht zufälligerweise parallel zu einer Koordinatenebene liegt, schneidet die drei Koordinatenebenen. Diese Schnittgeraden werden **Spurgeraden** der Ebene genannt, da es die «Spuren» sind, welche die Gerade in der Darstellung des Koordinatensystems hinterlässt.

Je zwei Spurgeraden einer Ebene schneiden sich auf den Koordinatenachsen. Diese Schnittpunkte sind die **Spurpunkte** der Ebene.

Die Spurpunkte einer Ebene ergeben sich, wenn in der Koordinatengleichung zwei der Koordinaten gleich Null gesetzt werden. Die Gleichungen der Spurgeraden können aus je zwei Spurpunkten konstruiert werden.



Beispiel. *Gegeben ist die Ebene mit der Koordinatengleichung* $6x + 4y + 3z - 12 = 0$*. Die Spurpunkte ergeben sich wie folgt:*

x*-Achse:*	$6x - 12 = 0$	$\Longrightarrow$	$x = 0.5$	$\Longrightarrow$	$S_x(0.5/0/0)$
y*-Achse:*	$4y - 12 = 0$	$\Longrightarrow$	$y = 3$	$\Longrightarrow$	$S_y(0/3/0)$
z*-Achse:*	$3z - 12 = 0$	$\Longrightarrow$	$z = 4$	$\Longrightarrow$	$S_z(0/0/4)$

Nun werden aus je zwei Spurpunkten die Spurgeraden konstruiert:

$$ss_{xy}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS_x} + t \cdot \overrightarrow{S_xS_y} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{yz}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS_y} + t \cdot \overrightarrow{S_yS_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$s_{xz}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS_z} + t \cdot \overrightarrow{S_zS_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4.4 Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene

Um den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu bestimmen, wird zunächst die Parametergleichung der Geraden in die einzelnen Komponenten zerlegt. Diese können für x, y und z in der Ebenengleichung eingesetzt werden. Daraus lässt sich der Parameter t der Geradengleichung bestimmen.

Beispiel. *Gegeben ist eine Ebene* E *und eine Gerade* g *mit*

$$E\colon 2x + 4y + z - 13 = 0 \qquad g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Um den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden zu bestimmen, wird die Geradengleichung in Komponenten zerlegt:

$$x = 2 + ty \qquad = -1z = 5 + 2t$$

Damit werden die Variablen in der Ebenengleichung ersetzt:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z - 13 &= 0 \\ 2(2+t) + 4 \cdot (-1) + 5 + 2t - 13 &= 0 \\ 4 + 2t - 4 - 5 + 2t - 13 &= 0 \\ 4t - 8 &= 0 \quad \Big| \; +8 \\ 4t &= 8 \quad \Big| \; :4 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

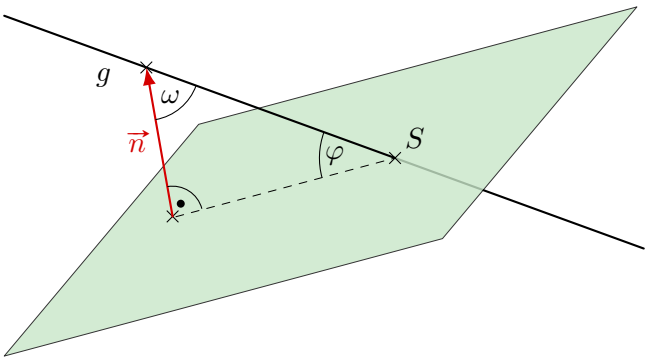
Der Schnittpunkt ergibt sich durch Einsetzen von $t = 2$ in der Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g ist $S(4/-1/9)$.

4.5 Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

Der Winkel φ zwischen Ebene mit einer Geraden wird am einfachsten indirekt bestimmt. Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene ist meist bekannt oder einfach bestimmbar. Der Winkel ω zwischen der Geraden und dem Normalenvektor kann sofort mit dem Skalarprodukt bestimmt werden. Dieser Winkel und der Winkel φ ergänzen sich zu 90°.



Da der gesuchte Winkel φ der Ergänzungswinkel zum berechneten Winkel ω ist, kann anstelle des Kosinus der Sinus verwendet werden.

Winkel zwischen Gerade und Ebene. Der Winkel φ zwischen einer Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$ und einer Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ beträgt

$$\varphi = 90° - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$

Beispiel. *Gegeben ist eine Ebene E und eine Gerade g mit*

$$E\colon 2x + 4y + z - 13 = 0 \qquad g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Um den Winkel zwischen der Ebene und der Geraden zu bestimmen, wird zunächst der Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden bestimmt.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21}$$
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{5}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{105}}\right) \approx 22.977°$$

Also beträgt der Winkel zwischen der Ebene und der Graden 22.977°.

5 Vektorprodukt

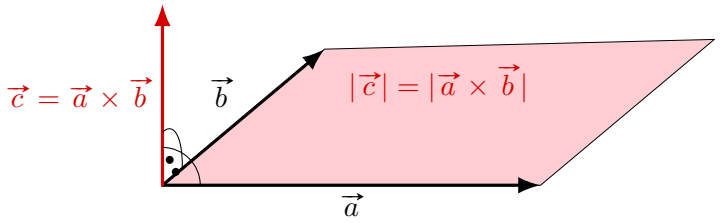
5.1 Definition und Eigenschaften

Vektorprodukt. Das Vektorprodukt $\vec{c}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist wie folgt definiert:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis des Vektorprodukts ist ein Vektor $\vec{c}$, welcher die folgenden Eigenschaften hat:

1. $\vec{c}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem.
3. Die Länge von $\vec{c}$ entspricht der Fläche des Parallelogramms, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet wird.



5.2 Berechnung

Um die **x-Komponente** des Vektorprodukts zu berechnen, werden die y- und z-Komponenten der ursprünglichen Vektoren wie unten dargestellt multipliziert und subtrahiert.

Analog wird die **y-Komponente** aus den z- und x-Komponente berechnet und die **z-Komponente** aus den x- und y-Komponenten.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

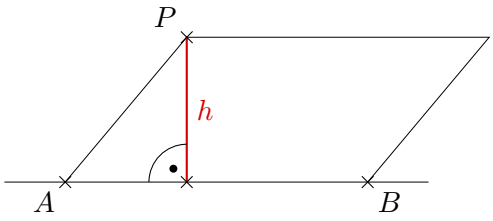
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

5.3 Abstand Punkt – Gerade

Mit dem Vektorprodukt kann auf einfache Weise der Abstand eines Punktes P von einer Geraden AB bestimmt werden.

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ bilden ein Parallelogramm, dessen Höhe h gerade dem Abstand des Punkts P von der Geraden entspricht.



Die Fläche des Parallelogramms kann auf zwei Arten bestimmt werden: mit dem Vektorprodukt und aus Grundlinie und Höhe. Daraus ergibt sich die folgende Gleichung:

$$A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot h$$

Wir die Gleichung nach h aufgelöst, entsteht eine Formel zur Berechnung des Abstands eines Punkts einer Geraden.

Abstand Gerade – Punkt. Der Abstand h eines Punkts P von der Geraden durch die Punkte A und B wird wie folgt berechnet:

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Beispiel. *Der Abstand des Punkts $P(1/4/6)$ von der Geraden durch die Punkte $A(-1/2/1)$ und $B(2/5/4)$ soll bestimmt werden.*

Schritt 1: Bestimmung der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Vektorprodukt berechnen.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Beträge berechnen.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{9^2 + (-9)^2 + 0^2} = \sqrt{162} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27}$$

Schritt 4: Abstand berechnen.

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{27}} = \sqrt{6}$$