Unbestimmtes Integral

1. Ermitteln das unbestimmte Integral der Funktionen f.

(a) $f(x) = 3x$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 + C$

(b) $f(x) = 8x^3$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^4 + C$

(c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3 + C$

(d) $f(x) = x^2 - 5x$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + C$

(e) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + 2x^2 + x + C$

(f) $f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 3x - 6$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^4 - 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$

(g) $f(x) = x^6 - 3x^5 + 7x^3$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{7}{4}x^4 + C$

(h) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + C$

(i) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{2}{7}$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{50}x^5 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{2}{7}x + C$

(j) $f(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}x$

Lösung: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + C$

2. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Stammfunktion F von f. Der Punkt P lieft auf dem Funktionsgraphen von F.

(a) $f(x) = 4x \qquad P(2/5)$

Lösung: $F(x) = 2x^2 - 3$

(b) $f(x) = 2x - 3 \qquad P(1/0)$

Lösung: $F(x) = x^2 - 3x + 2$

(c) $f(x) = -6x + 5 \qquad P(2/3)$

Lösung: $F(x) = -3x^2 + 5x + 5$

(d) $f(x) = 3x^2 - 4x \qquad P(0/-4)$

Lösung: $F(x) = x^3 - 2x^2 - 4$

(e) $f(x) = 6x^2 - 5 \qquad P(-2/-5)$

Lösung: $F(x) = 2x^3 - 5x + 1$

(f) $f(x) = 2x^3 - 6x \qquad P(-2/1)$

Lösung: $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5$

3. $F(x)$ ist eine Stammfunktion der Polynomfunktion $f(x)$. Welche zwei der folgenden Funktionen sind ebenfalls Stammfunktionen von $f(x)$?

◯ $c \cdot F(x)$ √ $c + F(x)$ √ $F(x) - c$ ◯ $c - F(x)$ ◯ $\frac{F(x)}{c}$

4. $f(x)$ ist eine Polynomfunktion. Welche zwei der folgenden Aussagen stimmen?

◯ $f(x)$ hat genau eine Stammfunktion $F(x)$.

√ $f(x)$ **hat genau eine Ableitungsfunktion** $f'(x)$**.**

◯ Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt $f'(x) = F(x)$.

√ **Ist** $F(x)$ **eine Stammfunktion von** $f(x)$**, so gilt** $F''(x) = f'(x)$**.**

◯ Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt $f(0) = F(0)$.

5. $f(x)$ ist eine Polynomfunktion. Welche zwei der folgenden Aussagen sind korrekt?

◯ $F(x) = f(x) + c$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

◯ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)$ ist eine Ableitungsfunktion von $f(x)$.

√ $f'(5)$ **ist die Steigung der Tangente an den Graphen von** $f(x)$ **an der Stelle 5.**

√ $f(x)$ **hat unendlich viele Stammfunktionen.**

◯ Wird die Stammfunktion einmal integriert, so erhält man die Funktion $f(x)$.

6. Eine Kugel wird aus grosser Höhe fallen gelassen. Die Erdbeschleunigung beträgt ca. 10 m/s^2, der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Die Beschleunigungsfunktion lautet also $a(t) = 10$.

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsfunktion als Stammfunktion von $a(t)$.

Lösung: $a(t) = 10 \quad \Longrightarrow \quad v(t) = 10t$

(b) Bestimmen Sie die Wegfunktion $s(t)$ als Stammfunktion von $v(t)$.

Lösung: $v(t) = 10t \quad \Longrightarrow \quad s(t) = 5t^2$

(c) Berechnen Sie, wie weit die Kugel in 4 Sekunden fällt.

Lösung: $s(4) = 80\,\text{m}$

7. Ein Auto fährt mit 36 km/h. Es beschleunigt 8 Sekunden lang mit 0.5 m/s^2.

(a) Geben Sie die Funktionsgleichungen der Geschwindigkeits- und Wegfunktion an.

Lösung:

$v(t) = 0.5t + 10 \qquad s(t) = 0.25t^2 + 10t$

(b) Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit das Auto am Ende des Beschleunigungsvorgangs hat und welchen Weg es zurückgelegt hat.

Lösung:

$v(8) = 14\,\text{m/s} = 50.4\,\text{km/h} \qquad s(8) = 96\,\text{m}$

8. Ein U-Bahnzug fährt mit 54 km/h. Er wird 3 Sekunden lang mit einer Bremsverzögerung von 2 m/s^2 abgebremst.

(a) Geben Sie die Funktionsgleichungen der Geschwindigkeits- und Wegfunktion an.

Lösung:

$v(t) = -2t + 15 \qquad s(t) = -t^2 + 15t$

(b) Berechnen Sie, wie hoch die Geschwindigkeit des Zugs am Ende des Bremsvorgangs ist und welchen Weg er währenddessen zurücklegt.

Lösung:

$v(3) = 9\,\text{m/s} = 32.4\,\text{km/h} \qquad s(3) = 36\,\text{m}$

9. Die Beschleunigung eines Läufers in den ersten Sekunden nach dem Start wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$a(t) = 3 - 0.6t$$

(a) Geben Sie die Funktionsgleichungen der Geschwindigkeits- und Wegfunktion an.

Lösung:

$$v(t) = 3t - 0.3t^2 \qquad s(t) = 1.5t^2 - 0.1t^3$$

(b) Berechne den Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit des Läufers maximal ist, und die dazugehörige Geschwindigkeit.

Lösung: $t = 5\,\mathrm{s} \qquad v(5) = 7.5\,\mathrm{m/s}$

10. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\int 4x^6 \,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$\int 4x^6 \,\mathrm{d}x = \boxed{\tfrac{4}{7}x^7 + C}$$

(b) $\int \left(x^2 + 2x - 7\right) \mathrm{d}x$

Lösung:

$$\int \left(x^2 + 2x - 7\right) \mathrm{d}x = \boxed{\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 7x + C}$$

(c) $\int \left(8ax^4 + \tfrac{1}{7}x^3\right) \mathrm{d}x$

Lösung:

$$\int \left(8ax^4 + \tfrac{1}{7}x^3\right) \mathrm{d}x = \boxed{\tfrac{8a}{5}x^5 + \tfrac{1}{28}x^4 + C}$$