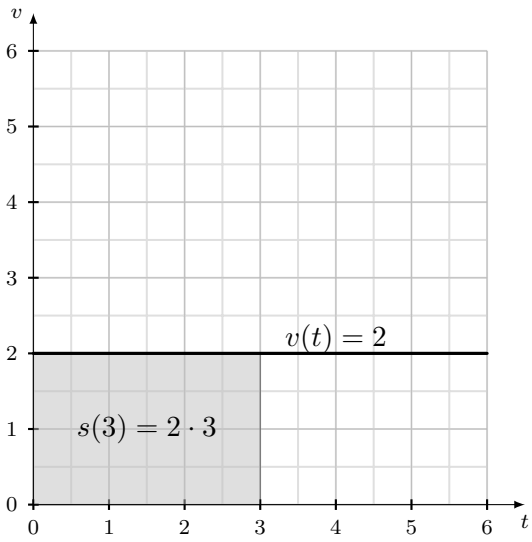
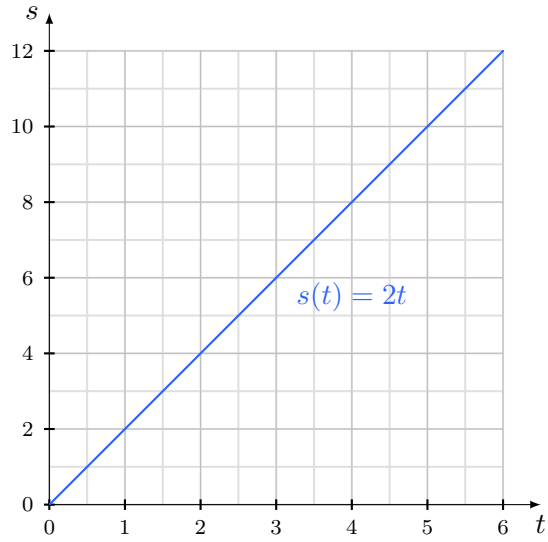
Bestimmtes Integral

1. Ein Fahrzeug fährt mit der konstanten Geschwindigkeit von 2 m/s.





Aus der Definition der Geschwindigkeit als Weg pro Zeit folgt, dass der zurückgelegte Weg gleich der Geschwindigkeit mal die Zeit ist:

$$v = \frac{s}{t} \quad \Longrightarrow \quad s = v \cdot t$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der zurückgelegte Weg

(a) Bestimmen Sie den Weg $s(t)$, den das Fahrzeug nach $1, 2, 3, 4, 5, 6$ Sekunden zurückgelegt hat, indem Sie die entsprechende Fläche berechnen.

t	1	2	3	4	5	6
$s(t)$	2	4	6	8	10	12

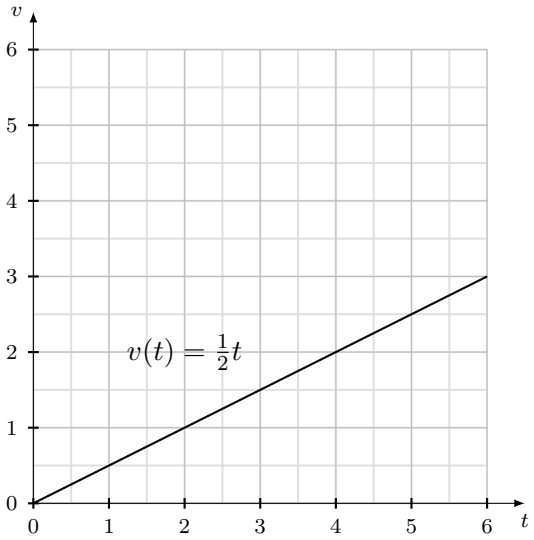
(b) Zeichnen Sie mit Hilfe der Tabelle den Graphen der Wegfunktion $s(t)$ in das rechte Koordinatensystem ein.

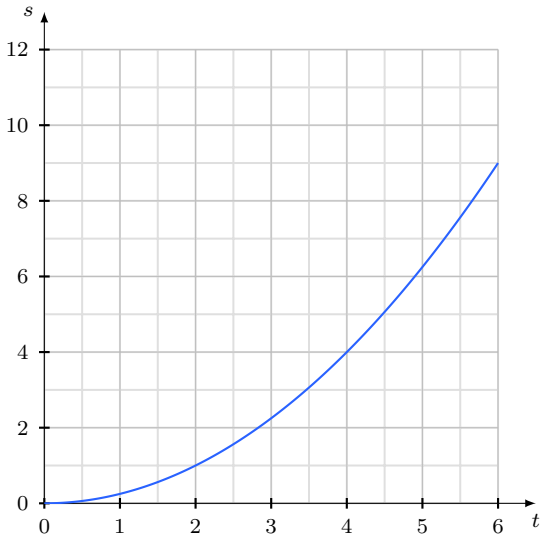
(c) Berechnen Sie die Wegfunktion als unbestimmtes Integral der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$.

Lösung:

$$\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int 2\,\mathrm{d}t = \boxed{2t + C}$$

2. Die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges wird mit der Funktion $v(t) = \frac{1}{2}t$ modelliert.





(a) Bestimmen Sie den Weg $s(t)$, den das Fahrzeug nach $1, 2, 3, 4, 5, 6$ Sekunden zurückgelegt hat, indem Sie die entsprechende Fläche berechnen.

t	1	2	3	4	5	6
$s(t)$	0.25	1	2.25	4	6.25	9

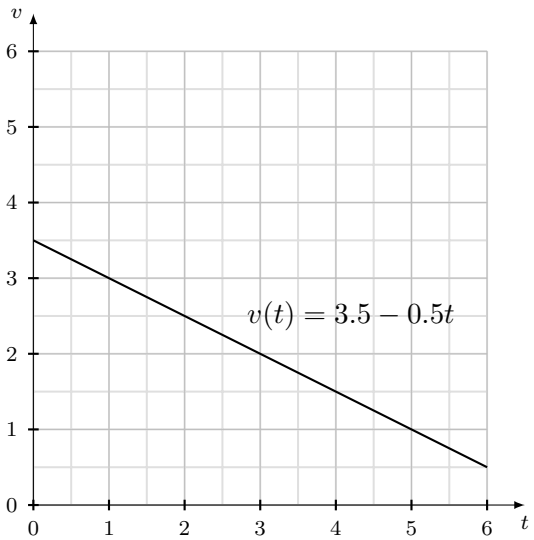
(b) Zeichnen Sie mit Hilfe der Tabelle den Graphen der Wegfunktion $s(t)$ in das rechte Koordinatensystem ein.

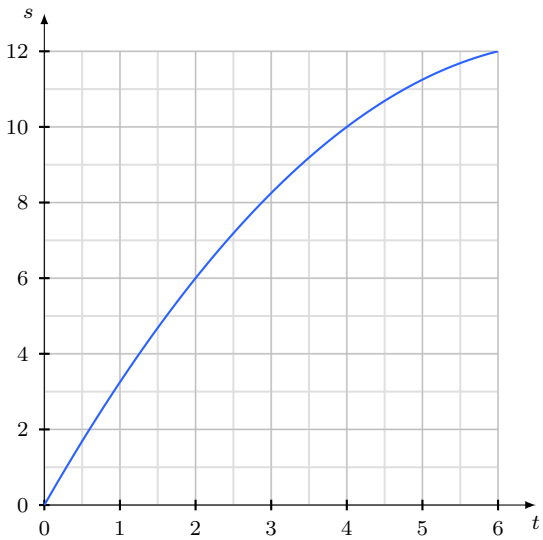
(c) Berechnen Sie die Wegfunktion als unbestimmtes Integral der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$.

Lösung:

$$\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int \tfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\cdot\int t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}t^2 + C = \boxed{\tfrac{1}{4}t^2 + C}$$

3. Die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges wird mit der Funktion $v(t) = 3.5 - 0.5t$ modelliert.





(a) Bestimmen Sie den Weg $s(t)$, den das Fahrzeug nach $1, 2, 3, 4, 5$ Sekunden zurückgelegt hat, indem Sie die entsprechende Fläche berechnen.

t	1	2	3	4	5	6
$s(t)$	3.25	6	8.25	10	11.25	12

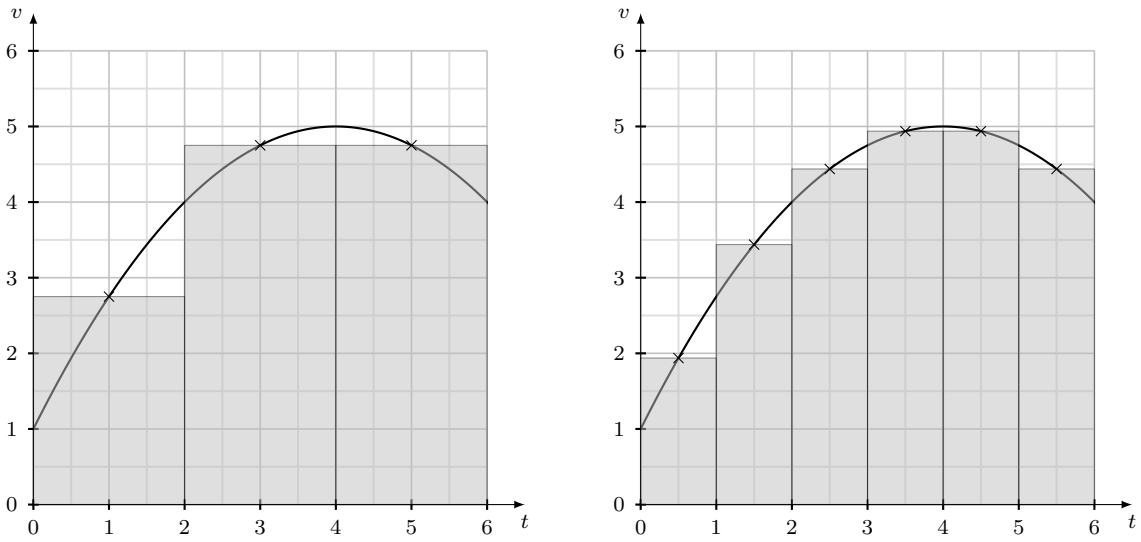
(b) Zeichnen Sie mit Hilfe der Tabelle den Graphen der Wegfunktion $s(t)$ in das rechte Koordinatensystem ein.

(c) Berechnen Sie die Wegfunktion als unbestimmtes Integral der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$.

Lösung:

$$\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (3.5 - 0.5t)\,\mathrm{d}t = \boxed{3.5t - 0.25t^2 + C}$$

4. Die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges wird mit der Funktion $v(t) = \frac{-1}{4}t^2 + 2t + 1$ modelliert.



Nun kann die Fläche nicht mehr geometrisch berechnet werden, da sie durch eine Kurve begrenzt ist. Als Näherung wird die Fläche der abgebildeten Rechtecke berechnet und summiert.

(a) Berechnen Sie die Summe der Rechteckflächen in der linken Abbildung.

$$F = v(1) \cdot 2 + v(3) \cdot 2 + v(5) \cdot 2 =$$

Lösung: $F = 2.75 \cdot 2 + 4.75 \cdot 2 + 4.75 \cdot 2 = 24.5$

(b) Berechnen Sie die Summe der Rechteckflächen in der rechten Abbildung.

$$F = v(0.5) \cdot 1 + v(1.5) \cdot 1 + v(2.5) \cdot 1 + v(3.5) \cdot 1 + v(4.5) \cdot 1 + v(5.5) \cdot 1 =$$

Lösung: $F = 1.9375 + 3.4375 + 4.4375 + 4.9375 + 4.9375 + 4.4375 = 24.125$

(c) Berechnen Sie die Stammfunktion von $v(t)$ für $C = 0$. Berechnen Sie den Wert der Stammfunktion für $t = 6$.

Lösung:

$$s(t) = \int \left(\tfrac{-1}{4}t^2 + 2t + 1\right) \mathrm{d}t = \tfrac{-1}{12}t^3 + t^2 + t$$

$$s(6) = \tfrac{-1}{12} \cdot 6^3 + 6^2 + 6 = \boxed{24}$$

(d) Drücken Sie die oben stehenden Summen mit einer Summenformel (Σ) aus. Versuchen Sie, eine allgemeine Summenformel zu finden, wenn die Rechteckbreite mit Δx bezeichnet wird.

Lösung:

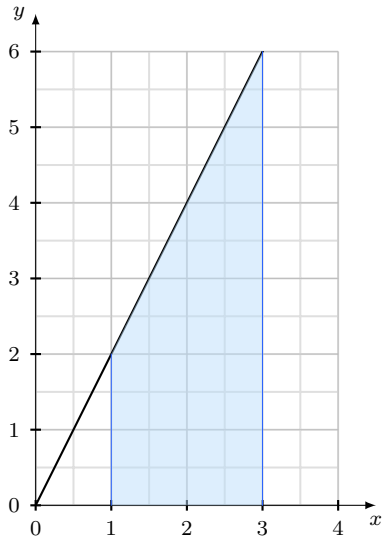
$$\sum_{k=0}^{2} v(2k+1) \cdot 2$$

$$\sum_{k=0}^{5} v(k+0.5) \cdot 1$$

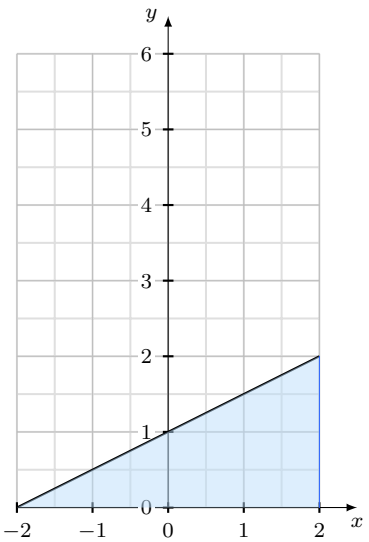
$$\sum_{k=0}^{n-1} v\left(\Delta x \cdot (k+0.5)\right) \cdot \Delta x$$

5. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale. Zeichnen Sie die entsprechenden Flächen in das Koordinatensystem ein. Vergleichen Sie die Flächeninhalte mit den berechneten Integralen.

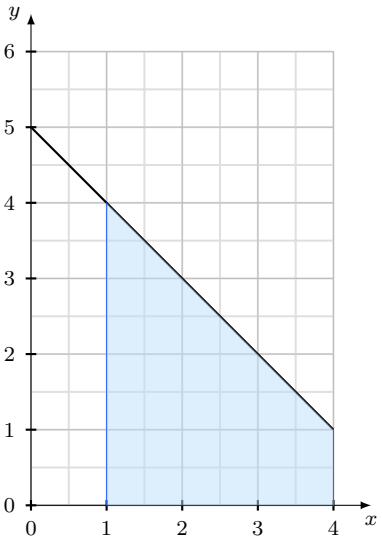
(a) $\int_1^3 2x \,\mathrm{d}x$



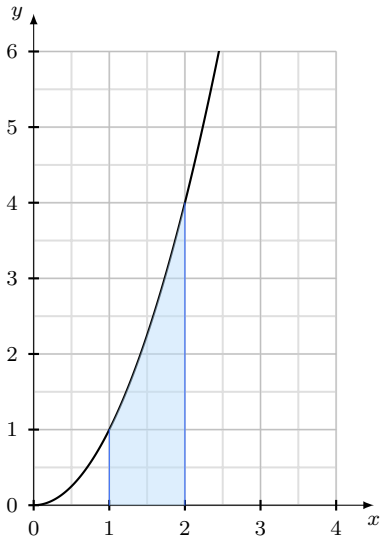
(b) $\int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x$



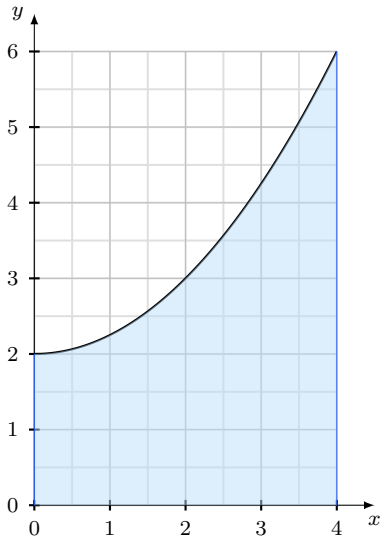
(c) $\int_1^4 (5 - x) \,\mathrm{d}x$



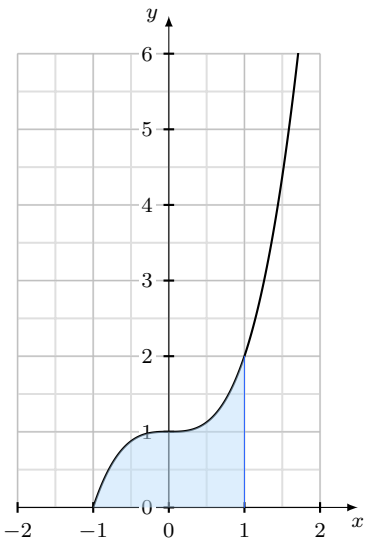
(d) $\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x$



(e) $\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right) \mathrm{d}x$



(f) $\int_{-1}^1 \left(x^3 + 1\right) \mathrm{d}x$



Lösung:

(a) Unbestimmtes Integral berechnen:

$$F(x) = \int 2x \,\mathrm{d}x = 2 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + C = x^2 + C$$

Werte des Integrals an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = 1^2 + C = 1 + C$$
$$F(3) = 3^2 + C = 9 + C$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^3 2x \,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = 9 + C - (1 + C) = \boxed{8}$$

(b) Unbestimmtes Integral berechnen:

$$F(x) = \int \left(\tfrac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + x + C = \tfrac{1}{4}x^2 + x + C$$

Werte des Integrals an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(-2) = \tfrac{1}{4}(-2)^2 + (-2) + C = -1 + C$$
$$F(2) = \tfrac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 + C = 3 + C$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{-2}^2 \left(\tfrac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x = F(2) - F(-2) = 3 + C - (-1 + C) = \boxed{4}$$

(c) Unbestimmtes Integral berechnen:

$$F(x) = \int (5 - x)\,\mathrm{d}x = 5x - \tfrac{1}{2}x^2 + C$$

Werte des Integrals an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = 5 \cdot 1 - \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 + C = 4.5 + C$$
$$F(4) = 5 \cdot 4 - \tfrac{1}{2} \cdot 4^2 + C = 12 + C$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^4 (5 - x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(1) = 12 + C - (4.5 + C) = \boxed{7.5}$$

(d) Unbestimmtes Integral berechnen:

$$F(x) = \int x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

Werte des Integrals an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 + C = \tfrac{1}{3} + C$$
$$F(2) = \tfrac{1}{3} \cdot 2^3 + C = \tfrac{8}{3} + C$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = \tfrac{8}{3} + C - \left(\tfrac{1}{3} + C\right) = \boxed{\tfrac{7}{3} = 2.\overline{3}}$$

(e) Unbestimmtes Integral berechnen:

$$F(x) = \int \left(\tfrac{1}{4}x^2 + 2\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{12}x^3 + 2x + C$$

Werte des Integrals an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = \tfrac{1}{12} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0 + C = C$$
$$F(4) = \tfrac{1}{12} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 + C = \tfrac{16}{3} + 8 + C = \tfrac{40}{3} + C$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^4 \left(\tfrac{1}{4}x^2 + 2\right)\mathrm{d}x = F(4) - F(0) = \tfrac{40}{3} + C - C = \boxed{\tfrac{40}{3} = 13.\overline{3}}$$

(f) Unbestimmtes Integral berechnen:

$$F(x) = \int \left(x^3 + 1\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 + x + C$$

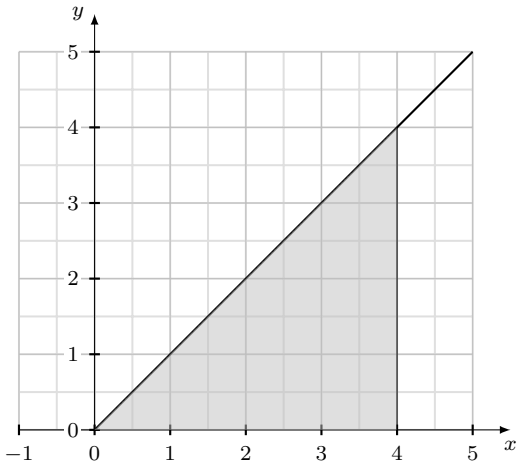
Werte des Integrals an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(-1) = \tfrac{1}{4}(-1)^4 + (-1) + C = \tfrac{-3}{4} + C$$
$$F(1) = \tfrac{1}{4} \cdot 1^4 + 1 + C = \tfrac{5}{4} + C$$

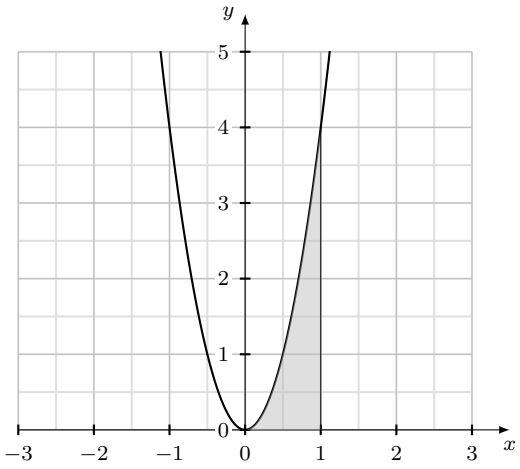
Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{-1}^1 \left(x^3 + 1\right)\mathrm{d}x = F(1) - F(-1) = \tfrac{5}{4} + C - \left(\tfrac{-3}{4} + C\right) = \tfrac{8}{4} = \boxed{2}$$

6. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:
Lösungsvideo



(a) $\int_0^4 x \,\mathrm{d}x$



(b) $\int_0^1 4x^2 \,\mathrm{d}x$

Lösung: Hinweis: In den Mathematrick-Videos wird eine andere Notation für die Berechnung von bestimmten Integralen verwendet. Die in den Videos verwendete Notation ist weit verbreitet, ich halte sie jedoch für wenig übersichtlich.

Für die Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ müssen die folgenden Schritte gemacht werden:

1. Bestimmen des unbestimmten Integrals bzw. der Stammfunktion $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Berechnen der Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen $F(a)$ und $F(b)$.
3. Berechnen des bestimmten Integrals durch Subtraktion der beiden Werte $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Die im Video verwendete Notation packt alle drei Schritte in eine einzige Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die dabei verwendete Schreibweise $[F(x)]_a^b$ mit den eckigen bedeutet eben, dass die Differenz der Funktionswerte $F(b)$ und $F(a)$ der Funktion in den Klammern gebildet wird.

(a) Zuerst wird die Stammfunktion ermittelt:

$$F(x) = \int x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2 + C$$

Die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = \tfrac{1}{2}\cdot 0^2 = 0$$
$$F(4) = \tfrac{1}{2}\cdot 4^2 = 8$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = F(4) - F(0) = 8 - 0 = \boxed{8}$$

(b) Zuerst wird die Stammfunktion ermittelt:

$$F(x) = \int 4x^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}x^3 + C$$

Die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = \tfrac{4}{3} \cdot 0^3 = 0$$
$$F(1) = \tfrac{4}{3} \cdot 1^3 = \tfrac{4}{3}$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^1 4x^x \,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \tfrac{4}{3} - 0 = \boxed{\tfrac{4}{3}}$$