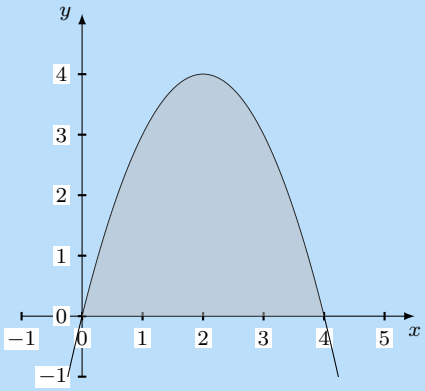
# Flächenberechnungen

**1.** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche durch den Graph der Funktion und die x-Achse eingeschlossen werden.

(a) $f(x) = -x^2 + 4x$

**Lösung:**




Bestimmen der Nullstellen mit Faktorisieren:

$$-x^2 + 4x = x \cdot (4 - x) = 0$$

Die Nullstellen liegen bei $x = 0$ und $x = 4$.

Bestimmen der Stammfunktion:

$$F(x) = \int \left(-x^2 + 4x\right) \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$F(0) = 0$$
$$F(4) = -\tfrac{1}{3}4^3 + 2 \cdot 4^2 = \tfrac{-64+96}{3} = \tfrac{32}{3}$$

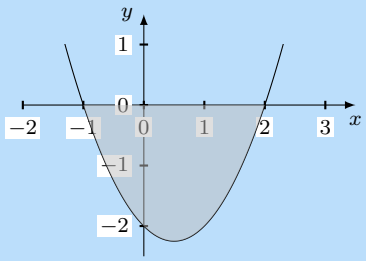
Berechnen der Fläche:

$$A = \left| \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \right| = |F(4) - F(0)| = \left|\tfrac{32}{3} - 0\right| = \tfrac{32}{3}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{\tfrac{32}{3} \approx 10.6667}$.

(b) $f(x) = x^2 - x - 2$

**Lösung:**




Bestimmen der Nullstellen mit Faktorisieren:

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

Die Nullstellen liegen bei $x = -1$ und $x = 2$.

Bestimmen der Stammfunktion:

$$F(x) = \int \left(x^2 - x - 2\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$F(-1) = \tfrac{1}{3}(-1)^3 - \tfrac{1}{2}(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = \tfrac{-1}{3} - \tfrac{1}{2} + 2 = \tfrac{-2-3+12}{6} = \tfrac{7}{6}$$
$$F(2) = \tfrac{1}{3} \cdot 2^3 - \tfrac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = \tfrac{8}{3} - 2 - 4 = \tfrac{8-18}{3} = \tfrac{-10}{3}$$

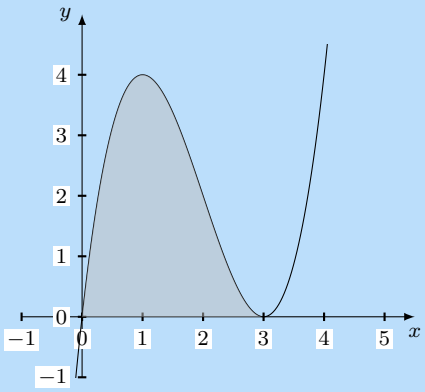
Berechnen der Fläche:

$$A = \left| \int_{-1}^{2} f(x) \, \mathrm{d}x \right| = |F(2) - F(-1)| = \left| \tfrac{-10}{3} - \tfrac{7}{6} \right| = \left| \tfrac{-9}{2} \right| = 4.5$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{4.5}$.

(c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

**Lösung:**




Bestimmen der Nullstellen:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2$$

Die Nullstellen liegen bei $x = 0$ und $x = 3$.

Bestimmen der Stammfunktion:

$$F(x) = \int \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4.5x^2 + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$F(0) = 0$$
$$F(3) = \tfrac{1}{4} \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 4.5 \cdot 3^2 = 6.75$$

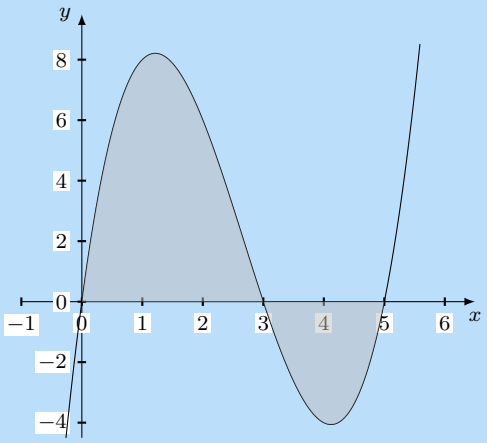
Berechnen der Fläche:

$$A = \left| \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x \right| = |F(3) - F(0)| = |6.75 - 0| = 6.75$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{6.75}$.

(d) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$

**Lösung:**




Bestimmen der Nullstellen:

$$x^3 - 8x^2 + 15x = x\left(x^2 - 8x + 15\right) = x(x-3)(x-5)$$

Die Nullstellen liegen bei $x = 0$, $x = 3$ und $x = 5$.

Bestimmen der Stammfunktion:

$$F(x) = \int \left(x^3 - 8x^2 + 15x\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{8}{3}x^3 + \tfrac{15}{2}x^2 + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$F(0) = 0$$
$$F(3) = \tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - \tfrac{8}{3}\cdot 3^3 + \tfrac{15}{2}\cdot 3^2 = \tfrac{81}{4} - \tfrac{216}{3} + \tfrac{135}{2} = \tfrac{243-864+810}{12} = \tfrac{189}{12}$$
$$F(5) = \tfrac{1}{4}\cdot 5^4 - \tfrac{8}{3}\cdot 5^3 + \tfrac{15}{2}\cdot 5^2 = \tfrac{625}{4} - \tfrac{1000}{3} + \tfrac{375}{2} = \tfrac{1875-4000+2250}{12} = \tfrac{125}{12}$$

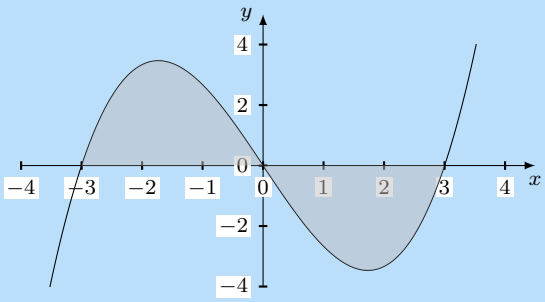
Berechnen der Fläche:

$$A = \left|\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(3) - F(0)| + |F(5) - F(3)|$$
$$= \left|\tfrac{189}{12} - 0\right| + \left|\tfrac{125}{12} - \tfrac{189}{12}\right| = \tfrac{189}{12} + \left|\tfrac{-64}{12}\right| = \tfrac{189}{12} + \tfrac{64}{12} = \tfrac{253}{12}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{\tfrac{253}{12} \approx 21.0833}$.

(e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$

**Lösung:**




Bestimmen der Nullstellen:

$$\frac{1}{3}x^3 - 3x = \frac{1}{3}x\left(x^2 - 9\right) = \frac{1}{3}x(x+3)(x-3)$$

Die Nullstellen liegen bei $x = -3$, $x = 0$ und $x = 3$.

Bestimmen der Stammfunktion:

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$\begin{aligned} F(-3) &= \tfrac{1}{12}(-3)^4 - \tfrac{3}{2}(-3)^2 = \tfrac{81}{12} + \tfrac{27}{2} = 6.75 - 13.5 = -6.75 \\ F(0) &= 0 \\ F(3) &= \tfrac{1}{12} \cdot 3^4 - \tfrac{3}{2} \cdot 3^2 = \tfrac{81}{12} - \tfrac{27}{2} = 6.75 - 13.5 = -6.75 \end{aligned}$$

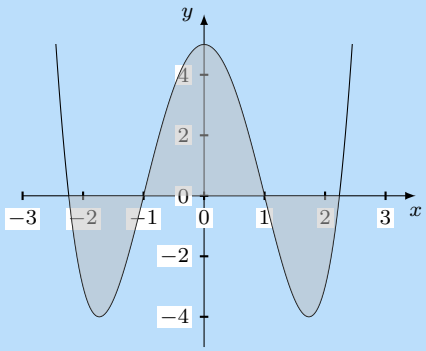
Berechnen der Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(0) - F(-3)| + |F(3) - F(0)| \\ &= |0 - (-6.75)| + |-6.75 - 0| = 6.75 + 6.75 = 13.5 \end{aligned}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{13.5}$.

(f) ★ $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

**Lösung:**




Bestimmen der Nullstellen: Durch die Substitution $z = x^2$ entsteht eine quadratische Gleichung:

$$0 = z^2 - 6z + 5 = (z - 5)(z - 1)$$

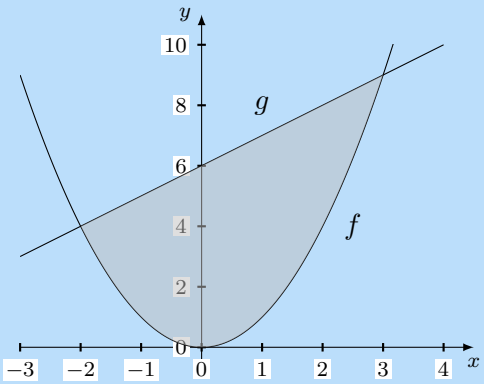
Diese hat die Lösungen $z = 1$ und $z = 5$, also sind die Lösungen der ursprünglichen Gleichung und somit die Nullstellen $x = \pm 1$ und $x = \pm\sqrt{5}$

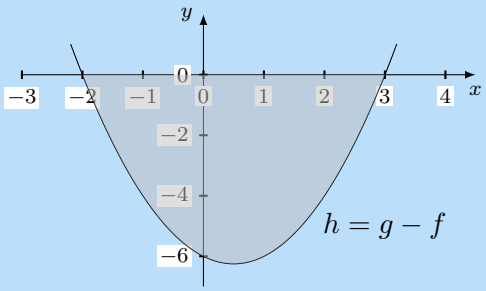
Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{12.8}$.

**2.** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

(a) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = x + 6$

**Lösung:**




Differenzfunktion bestimmen:

$$h(x) = g(x) - f(x) = x + 6 - x^2 = -x^2 + x + 6$$

Nullstellen der Funktion $h$ bestimmen, hier z.B. Lösungsformel mit $a = -1$, $b = 1$, $c = 6$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Die Nullstellen von $h$ liegen bei $x = -2$ und $x = 3$.

Stammfunktion von $h$ bestimmen:

$$H(x) = \int \left(-x^2 + x + 6\right) \mathrm{d}x = \tfrac{-1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 6x + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$H(-2) = \tfrac{-1}{3}(-2)^3 + \tfrac{1}{2}(-2)^2 + 6 \cdot (-2) = \tfrac{8}{3} + 2 - 12 = \tfrac{-22}{3}$$
$$H(3) = \tfrac{-1}{3} \cdot 3^3 + \tfrac{1}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = -9 + 4.5 + 18 = 13.5 = \tfrac{27}{2}$$

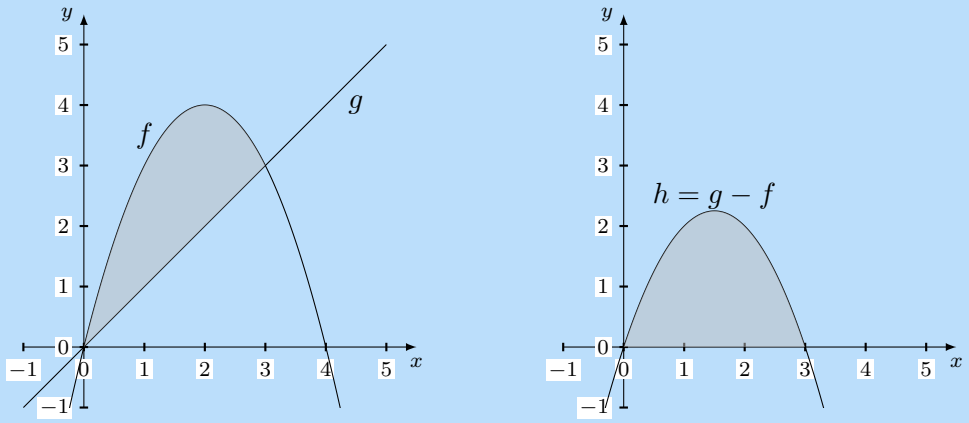
Berechnen der Fläche:

$$A = \left| \int_{-2}^{3} h(x) \, \mathrm{d}x \right| = |H(3) - H(-2)| = \left| \tfrac{27}{2} - \tfrac{-22}{3} \right| = \left| \tfrac{81+44}{6} \right| = \tfrac{125}{6}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{\tfrac{125}{6} \approx 20.8333}$.

(b) $f(x) = -x^2 + 4x \qquad g(x) = x$

**Lösung:**




Differenzfunktion bestimmen:

$$h(x) = g(x) - f(x) = x - \left(-x^2 + 4x\right) = x + x^2 - 4x = x^2 - 3x$$

Nullstellen der Funktion $h$ bestimmen mit Satz vom Nullprodukt:

$$0 = x^2 - 3x = x \cdot (x - 3)$$

Die Nullstellen von $h$ liegen bei $x = 0$ und $x = 3$.

Stammfunktion von $h$ bestimmen:

$$H(x) = \int \left(x^2 - 3x\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$H(0) = 0$$
$$H(3) = \tfrac{1}{3} \cdot 3^3 - \tfrac{3}{2} \cdot 3^2 = 9 - 13.5 = -4.5$$

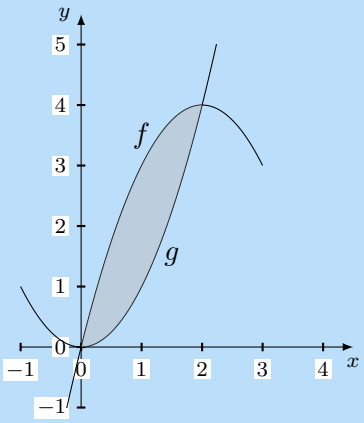
Berechnen der Fläche:

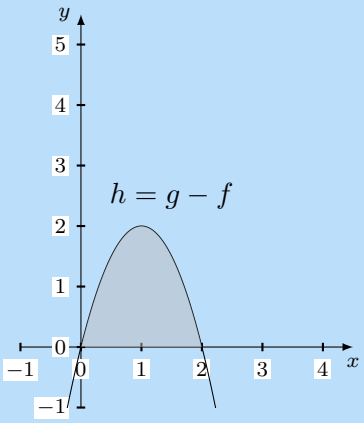
$$A = \left| \int_0^3 h(x) \, \mathrm{d}x \right| = |H(3) - H(0)| = |-4.5 - 0| = 4.5$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{4.5}$.

(c) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = -x^2 + 4x$

**Lösung:**




Differenzfunktion bestimmen:

$$h(x) = g(x) - f(x) = -x^2 + 4x - x^2 = -2x^2 + 4x$$

Nullstellen der Funktion $h$ bestimmen mit Satz vom Nullprodukt:

$$0 = -2x^2 + 4x = -2x \cdot (x - 2)$$

Die Nullstellen von $h$ liegen bei $x = 0$ und $x = 2$.

Stammfunktion von $h$ bestimmen:

$$H(x) = \int \left(-2x^2 + 4x\right) \mathrm{d}x = \tfrac{-2}{3}x^3 + 2x^2 + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$H(0) = 0$$
$$H(2) = \tfrac{-2}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 = \tfrac{-16}{3} + 8 = \tfrac{8}{3}$$

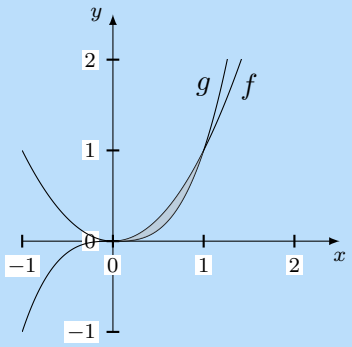
Berechnen der Fläche:

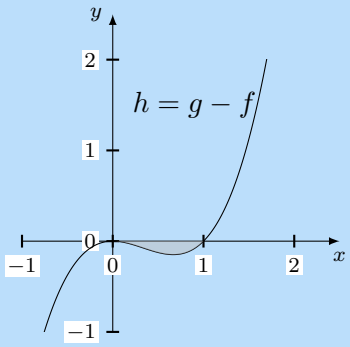
$$A = \left| \int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x \right| = |H(2) - H(0)| = \left|\tfrac{8}{3} - 0\right| = \tfrac{8}{3}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{\tfrac{8}{3} \approx 2.6667}$.

(d) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^3$

**Lösung:**




Differenzfunktion bestimmen:

$$h(x) = g(x) - f(x) = x^3 - x^2$$

Nullstellen der Funktion $h$ bestimmen mit Satz vom Nullprodukt:

$$0 = x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$$

Die Nullstellen von $h$ liegen bei $x = 0$ und $x = 1$.

Stammfunktion von $h$ bestimmen:

$$H(x) = \int \left(x^3 - x^2\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$H(0) = 0$$
$$H(1) = \tfrac{1}{4} \cdot 1^4 - \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{12}$$

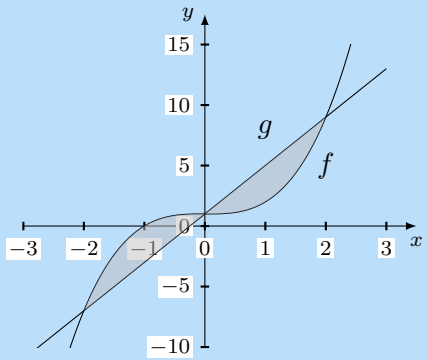
Berechnen der Fläche:

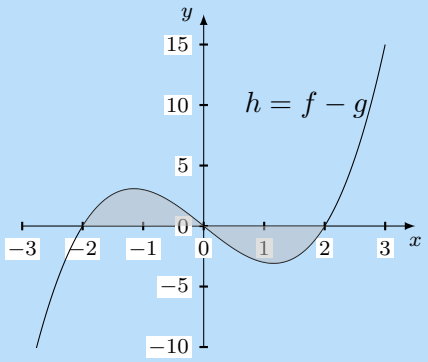
$$A = \left| \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x \right| = |H(1) - H(0)| = \left|\tfrac{1}{12} - 0\right| = \tfrac{1}{12}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{\tfrac{1}{12} \approx 0.0833}$.

(e) $f(x) = x^3 + 1 \qquad g(x) = 4x + 1$

**Lösung:**




Differenzfunktion bestimmen:

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 1 - (4x + 1) = x^3 - 4x$$

Nullstellen der Funktion $h$ bestimmen mit Satz vom Nullprodukt:

$$0 = x^3 - 4x = x \cdot \left(x^2 - 4\right) = x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$$

Die Nullstellen von $h$ liegen bei $x = 0$ und $x = -2$ und $x = 2$.

Stammfunktion von $h$ bestimmen:

$$H(x) = \int \left(x^3 - 4x\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

$$\begin{aligned} H(-2) &= \tfrac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^2 = 4 - 8 = -4 \\ H(0) &= 0 \\ H(2) &= \tfrac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 = 4 - 8 = -4 \end{aligned}$$

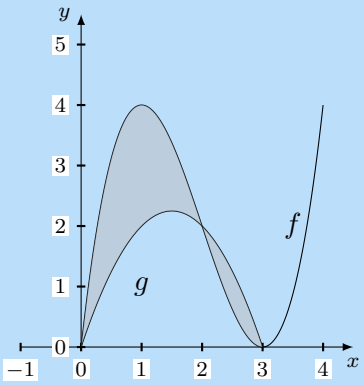
Berechnen der Fläche:

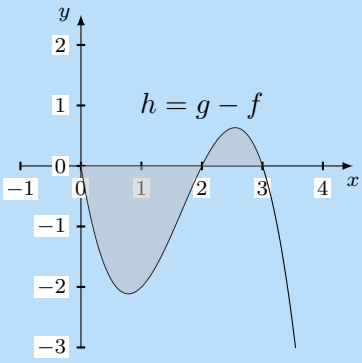
$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^{0} h(x) \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{-0}^{2} h(x) \, \mathrm{d}x \right| = |H(0) - H(-2)| + |H(2) - H(0)| \\ &= |0 - (-4)| + |-4 - 0| = |4| + |-4| = 8 \end{aligned}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{8}$.

(f) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad g(x) = -x^2 + 3x$

**Lösung:**




Differenzfunktion bestimmen:

$$h(x) = g(x) - f(x) = -x^2 + 3x - \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) = -x^3 + 5x^2 - 6x$$

Nullstellen der Funktion $h$ bestimmen mit Satz vom Nullprodukt:

$$0 = -x^3 + 5x^2 - 6x = -x \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right) = x \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$

Die Nullstellen von $h$ liegen bei $x = 0$ und $x = 2$ und $x = 3$.

Stammfunktion von $h$ bestimmen:

$$H(x) = \int \left(-x^3 + 5x^2 - 6x\right) \mathrm{d}x = \tfrac{-1}{4}x^4 + \tfrac{5}{3}x^3 - 3x^2 + C$$

Berechnen der Werte der Stammfunktion ohne $C$:

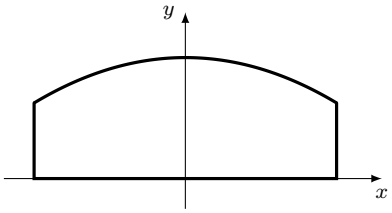
$$H(0) = 0$$
$$H(2) = \tfrac{-1}{4} \cdot 2^4 + \tfrac{5}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4 + \tfrac{40}{3} - 12 = \tfrac{-8}{3} = \tfrac{-32}{12}$$
$$H(3) = \tfrac{-1}{4} \cdot 3^4 + \tfrac{5}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 = \tfrac{-81}{4} + 45 - 27 = \tfrac{-9}{4} = \tfrac{-27}{12}$$

Berechnen der Fläche:

$$A = \left|\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_2^3 h(x)\,\mathrm{d}x\right| = |H(2) - H(0)| + |H(3) - H(2)|$$
$$= \left|\tfrac{-32}{12} - 0\right| + \left|\tfrac{-27}{12} - \tfrac{-32}{12}\right| = \tfrac{32}{12} + \tfrac{5}{12} = \tfrac{37}{12}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $\boxed{\tfrac{37}{12} \approx 3.0833}$.

**3.** Ein 2 km langer Strassentunnel ist 10 m breit, in der Mitte 4 m hoch und an den Seiten 2.5 m hoch. Der Querschnitt hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetzter Parabel (siehe Bild).




Um die Anforderungen an ein neues Belüftungssystem zu ermitteln, muss das Volumen des Tunnels berechnet werden.

(a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel, wenn das Koordinatensystem wie in der Abbildung angenommen wird.

**Lösung:** Als Ansatz für die Funktionsgleichung eignet sich die Scheitelform:

$$f(x) = a\,(x - x_S)^2 + y_S$$

Dabei ist $S(0/4)$ der Scheitelpunkt. Der Parameter $a$ wird bestimmt, indem die Koordinaten des Punkts $P(5/2.5)$ auf dem Graph in die Gleichung eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rl|l} f(x) = ax^2 + 4 & & P(5/2.5) \\ 2.5 = a \cdot 5^2 + 4 & & -4 \\ -1.5 = a \cdot 25 & & : 25 \\ -0.06 = a & & \end{array}$$

Also lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = -0.06x^2 + 4}$

(b) Berechnen Sie die Fläche des Tunnelquerschnitts.

**Lösung:** Zunächst wird die Stammfunktion $F$ ermittelt:

$$F(x) = -0.02x^3 + 4x + C$$

Die Werte der Stammfunktion an den Grenzen wird berechnet:

$$F(-5) = -0.02 \cdot (-5)^3 + 4 \cdot (-5) = 2.5 + (-20) = -17.5$$
$$F(5) = -0.02 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5 = -2.5 + 20 = 17.5$$

Nun kann die Querschnittsfläche berechnet werden:

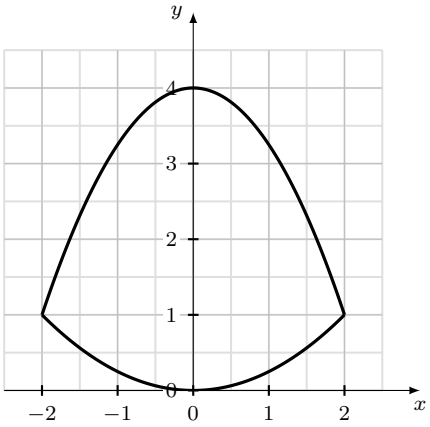
$$A = \int_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(-5) = 17.5 - (-17.5) = 17.5 + 17.5 = 35$$

Die Querschnittsfläche des Tunnels beträgt $\boxed{35\,\mathrm{m}^2}$.

(c) Berechnen Sie das Volumen des Tunnels.

**Lösung:** Das Volumen des Tunnels beträgt $V = 35 \cdot 2000 = \boxed{70'000\,\mathrm{m}^3}$

**4.** Ein Architekt will in einem modernen Gebäude Fenster einbauen, deren Form durch zwei Parabeln begrenzt wird. Sie sollen basierend auf der Skizze des Architekten den Flächeninhalt eines Fensters berechnen. Die Masse sind in Meter angegeben.




(a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln.

**Lösung:** Der untere Teil des Fensters wird durch die Funktion $f(x) = ax^2$ beschrieben. Der Graph geht durch den Punkt $P(2/1)$. Damit kann $a$ bestimmt werden:

$$\begin{array}{rl|l} f(x) = ax^2 & & P(2/1) \\ 1 = a \cdot 2^2 & & \text{ausrechnen} \\ 1 = 4a & & :4 \\ 0.25 = a & & \end{array}$$

Also lautet die Funktionsgleichung

$$\boxed{f(x) = 0.25x^2}$$

Der obere Teil des Fensters wird durch die folgende Funktion beschrieben (Scheitelpunktform):

$$\begin{array}{rl|l} g(x) = ax^2 + 4 & & P(2/1) \\ 1 = a \cdot 2^2 + 4 & & -4 \\ -3 = 4a & & :4 \\ -0.75 = a & & \end{array}$$

Also lautet die Funktionsgleichung

$$\boxed{g(x) = -0.75x^2 + 4}$$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Fensters.

**Lösung:** Dazu wird die Differenzfunktion bestimmt:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 0.25x^2 - \left(-0.75x^2 + 4\right) = x^2 - 4$$

Die Nullstellen der Funktion $h$ werden mit der dritten binomischen Formel und dem

Satz vom Nullprodukt bestimmt:

$$0 = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

Die Nullstellen sind also $x = -2$ und $x = 2$ und stimmen wie erwartet mit den Fensterecken überein.

Ermitteln der Stammfunktion von $h$:

$$H(x) = \int \left(x^2 - 4\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 - 4x + C$$

Berechnen der Werte von $H$:

$$H(-2) = \tfrac{1}{3}(-2)^3 - 4(-2) = \tfrac{-8}{3} + 8 = \tfrac{16}{3}$$
$$H(2) = \tfrac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = \tfrac{8}{3} - 8 = \tfrac{-16}{3}$$

Berechnen der Fläche:

$$A = |\int_{-2}^{2} h(x)\,\mathrm{d}x| = |H(2) - H(-2)| = |\tfrac{-16}{3} - \tfrac{16}{3}| = |\tfrac{-32}{3}| = \tfrac{32}{3}$$

Der Flächeninhalt des Fensters beträgt $\boxed{10.6667\,\mathrm{m}^2}$.

**5.** Die Querschnittsfläche eines Kanals wird von der Kurve begrenzt, die durch die Funktion

$$f(x) = 0.02 \cdot x^4 - 2$$

beschrieben wird. Die Masse werden in Meter angegeben, Der Wasserspiegel liegt auf der x-Achse.

(a) Ermittlen Sie die Breite des Kanals an der Wasseroberfläche.

**Lösung:** 6.32 m

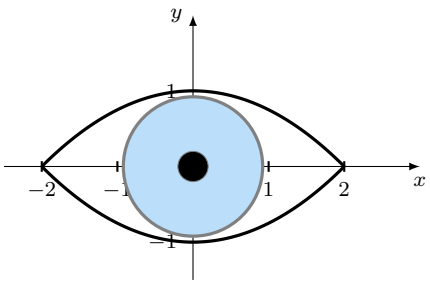
(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Kanalquerschnitts.

**Lösung:** 10.12 $m^2$

(c) Berechnen Sie, wie viele Liter Wasser pro Sekunde durch den Kanal fliessen, wenn die Strömungsgeschwindigkeit 2.5 m/s beträgt.

**Lösung:** 25'300 l

**6.** Für eine Augenarztpraxis soll ein Logo entworfen werden, welches ein Auge symbolisiert. Die Augenöffnung wird durch zwei Parabeln modelliert. Die Iris soll durch eine blau gefüllten Kreis dargestellt werden, welcher die Hälfte der Fläche einnimmt. Die Masse sind in Zentimeter angegeben. Wie gross muss der Radius des Kreises sein?




**Lösung:** Die beiden Funktionsgleichungen lauten:

$$f(x) = 0.25x^2 - 1 \qquad g(x) = -0.25x^2 + 1$$

Die Differenzfunktion lautet:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 0.25x^2 - 1 - \left(-0.25x^2 + 1\right) = 0.5x^2 - 2$$

Die Nullstellen der Funktion $h$ mit dritter binomischer Formel und Satz vom Nullprodukt ermitteln:

$$0 = 0.5x^2 - 2 = 0.5 \cdot \left(x^2 - 4\right) = 0.5 \cdot (x+2) \cdot (2-x)$$

Die Nullstellen sind $x = -2$ und $x = 2$, also wie zu erwarten die Eckpunkte des Auges.

Stammfunktion von $h$ ermitteln:

$$H(x) = \int \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}x^3 - 2x + C$$

Werte der Stammfunktion ohne $C$ berechnen:

$$H(-2) = \tfrac{1}{6}(-2)^3 - 2(-2) = \tfrac{-8}{6} + 4 = \tfrac{16}{6}$$
$$H(2) = \tfrac{1}{6} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 = \tfrac{8}{6} - 4 = \tfrac{-16}{6}$$

Fläche berechnen:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} h(x) \,\mathrm{d}x \right| = |F(2) - F(-2)| = \left|tfrac{-16}{6} - \tfrac{16}{6}\right| = \left|\tfrac{-32}{6}\right| = \tfrac{32}{6} = \tfrac{16}{3}$$

Die gesamte Fläche beträgt $\frac{16}{3}$, also beträgt die Fläche des Kreises $\frac{8}{3}$. Nun wird der Radius des Kreises berechnet:

$$\begin{aligned} \pi \cdot r^2 &= \tfrac{8}{3} \qquad &&| : \pi \\ r^2 &= \tfrac{8}{3\pi} \qquad &&| \sqrt{\ } \\ r &= \sqrt{\tfrac{8}{3\pi}} \approx 0.9213 \end{aligned}$$

Der Radius des Kreises muss also $\boxed{0.9213\,\text{cm}}$ betragen.