Musterprobe Integralrechnung

- Sie haben 80 Minuten Zeit.
- Sie dürfen den Taschenrechner und das Fundamentum verwenden.
- Runden Sie auf vier Dezimalstellen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Total	Note
max. Punkte	7	4	7	6	6	5	35	
Punkte								

1. **(7P)**

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktionen von $f(x) = 10x^4 - 3x^2 - 6$ (2P)

Lösung:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{2x^5 - x^3 - 6x + C}$$

Bewertung:

- korrekte Stammfunktion **1P**
- Integrationskonstante vorhanden **1P**

(b) Bestimmen Sie die Stammfunktionen von $f(x) = \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}$ (2P)

Lösung: Als Potenzen schreiben:

$$f(x) = 6x^{-4} - 2x^{-3}$$

Stammfunktion bestimmen:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{6}{-3}x^{-3} - \tfrac{2}{-2}x^{-2} + C = -2x^{-3} + x^{-2} + C = \boxed{\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + C}$$

(c) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3$, deren Graph durch den Punkt $P(-2/9)$ verläuft. (3P)

Lösung:

$$\begin{aligned} F(x) &= x^4 + 2x^3 - 3x + c && \mid\ P(-2/9) \\ 9 &= (-2)^4 + 2\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2) + c && \mid\ \text{ausrechnen} \\ 9 &= 16 - 16 + 6 + c && \mid\ -6 \\ 3 &= c \end{aligned}$$

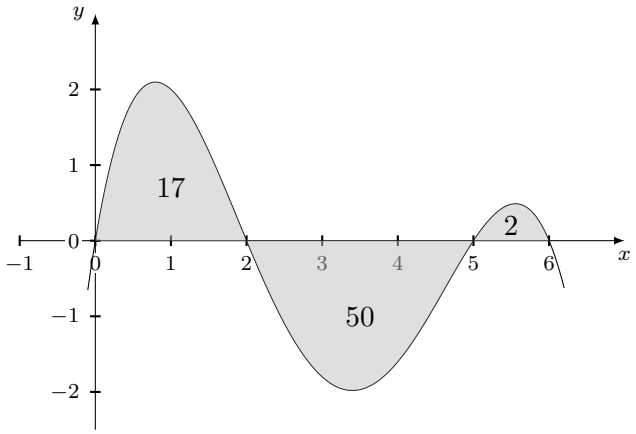
Die Stammfunktion lautet $\boxed{F(x) = x^4 + 2x^3 - 3x + 3}$.

Bewertung:

- korrekte Stammfunktion **1P**

- Integrationskonstante ermittelt **1P**
- Stammfunktion mit Konstante vorhanden **1P**

2. Die Abbildung zeigt die Funktion f, welche Nullstellen bei 0, 2, 5 und 6 hat. Die Inhalte der grauen Flächen sind ebenfalls angegeben. **(4P)**



Geben Sie die Werte der folgenden bestimmten Integrale aus dieser Auswahl an:

$$-31 \qquad 69 \qquad -33 \qquad 52 \qquad 67 \qquad 152$$

(a) $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = -31$ (1P)

(b) $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -33$ (1P)

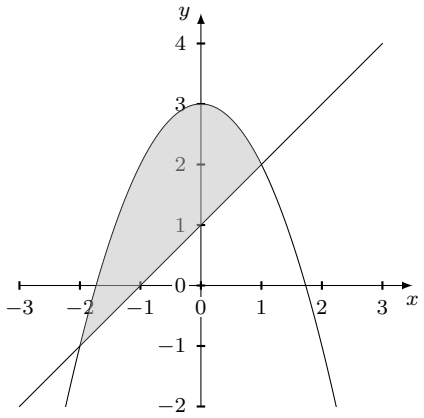
(c) $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 69$ (1P)

(d) $\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x + 100 = 52$ (1P)

3. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen f und g eingeschlossen wird. (7P)

$f(x) = -x^2 + 3$

$g(x) = x + 1$



Lösung: Differenzfunktion bestimmen:

$$h(x) = g(x) - f(x) = x + 1 - \left(-x^2 + 3\right) = x^2 + x - 2$$

Schnittpunkte bestimmen (Nullpunkte von h):

$$0 = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

Die Schnittpunkte liegen bei $x = -2$ und $x = 1$.

Stammfunktion von h bestimmen:

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

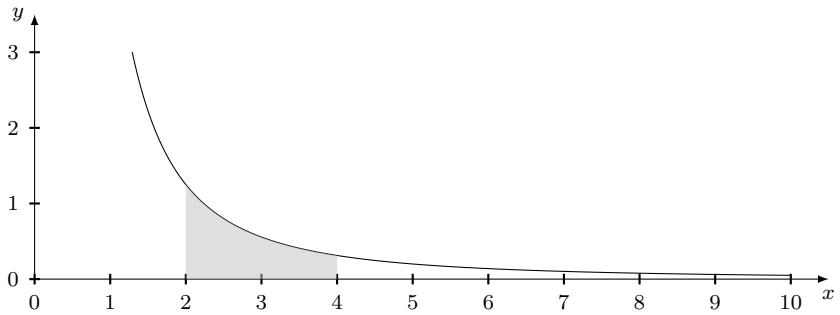
Werte der Stammfunktion ermitteln:

$$H(-2) = \tfrac{1}{3}(-2)^3 + \tfrac{1}{2}(-2)^2 - 2(-2) = \tfrac{-8}{3} + \tfrac{4}{2} + 4 = \tfrac{10}{3}$$
$$H(1) = \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 + \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - 2\cdot 1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - 2 = \tfrac{-7}{6}$$

Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_{-2}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(1) - F(-2)| = \left|\tfrac{-7}{6} - \tfrac{10}{3}\right| = \left|\tfrac{-27}{6}\right| = \boxed{4.5}$$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{5}{x^2}$. **(6P)**



(a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[2, 4]$. (4P)

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int 5x^{-2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{5}{-1}x^{-1} + C = \frac{-5}{x} + C$$

Berechnen der Werte von F:

$$F(2) = \tfrac{-5}{2} = -2.5$$
$$F(4) = \tfrac{-5}{4} = -1.25$$

Berechnen der Fläche:

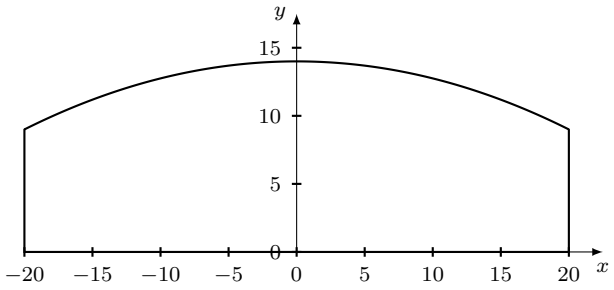
$$A = \left|\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(4) - F(2)| = |-2.5 - (-1.25)| = |-1.25| = \boxed{1.25}$$

(b) Berechnen Sie den Inhalt der unendlich langen Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse für $x \geq 2$. (2P)

Lösung: Berechnen der Fläche mit Grenzwert:

$$A = \int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(\int_2^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{b\to\infty}\left(F(b) - F(2)\right)$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-5}{b} + 2.5\right) = -5 \cdot \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}\right) + 2.5 = -5 \cdot 0 + 2.5 = \boxed{2.5}$$

5. Das Dach einer Tennishalle hat einen parabelförmigen Querschnitt. In der Mitte ist die Halle 14 m hoch, am Rand beträgt die Höhe 9 m. Die Halle hat eine Länge von 62 m. Für den Einbau einer neuen Heizung muss das Volumen der Halle bekannt sein. Wie gross ist es? (6P)





Lösung: Der Scheitelpunkt der Parabel hat die Koordinaten $S(0/14)$. Also lautet die Scheitelpunktform:

$$f(x) = a \cdot x^2 + 14$$

Um a zu bestimmen, wird der Punkt $P(20/9)$ in die Gleichung eingesetzt.

$f(x) = a \cdot x^2 + 14$	$P(20/9)$
$9 = a \cdot 20^2 + 14$	ausrechnen
$9 = a \cdot 400 + 14$	-14
$-5 = a \cdot 400$	$: 400$
$\frac{-1}{80} = a$	

Die Funktionsgleichung des Dachquerschnitts lautet also:

$$f(x) = \tfrac{-1}{80}x^2 + 14$$

Die Querschnittsfläche wird mit dem bestimmten Integral berechnet. Dazu wird erst die Stammfunktion ermittelt:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{-1}{240} \cdot x^3 + 14x$$

Nun werden die Werte der Stammfunktion berechnet:

$$F(-20) = \tfrac{-1}{240} \cdot (-20)^3 + 14 \cdot (-20) = \tfrac{-740}{3}$$
$$F(20) = \tfrac{-1}{240} \cdot 20^3 + 14 \cdot 20 = \tfrac{740}{3}$$

Nun wird die Fläche berechnet:

$$\int_{-20}^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = F(20) - F(-20) = \tfrac{740}{3} - \tfrac{-740}{3} = \tfrac{1480}{3} \approx 493.3333$$

Die Querschnittsfläche beträgt 493.3333 m^2, also beträgt das Volumen $\boxed{30'586.6667\,\mathrm{m}^3}$.
Bewertung:

- Ansatz Funktion korrekt **1P**
- a korrekt ermittelt **1P**
- Stammfunktion korrekt **1P**
- Formel bestimmtes Integral **1P**
- Ergebnis Integral korrekt **1P**
- Antwort korrekt **1P**

6. Ein Auto beschleunigt in 10 Sekunden von 0 auf 72 km/h. Die Beschleunigung ist konstant. **(5P)**

(a) Berechnen Sie die Beschleunigung. (2P)

Lösung: Die gesuchte Beschleunigung wird als k bezeichnet:

$$a(t) = k$$

Die Geschwindigkeitsfunktion ist die Stammfunktion der Beschleunigungsfunktion. Sie lautet:

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = k \cdot t$$

Es muss $v(10) = 72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$ gelten, also:

$$\begin{array}{l|l} v(t) = k \cdot t & v(10) = 20 \\ 20 = k \cdot 10 & :10 \\ 2 = k & \end{array}$$

Die Beschleunigung beträgt also $\boxed{2\,\mathrm{m/s}^2}$.

(b) Geben Sie die Funktionsgleichungen der Geschwindigkeits- und Wegfunktion an. (2P)

Lösung: Die Geschwindigkeitsfunktion ist nun bekannt:

$$\boxed{v(t) = 2 \cdot t}$$

Die Wegfunktion ist die Stammfunktion der Geschwindigkeitsfunktion:

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int 2t\,\mathrm{d}t = \boxed{t^2}$$

(c) Berechnen Sie, welchen Weg das Auto in diesem Zeitraum zurücklegt. (1P)

Lösung: $s(10) = \boxed{100\,\mathrm{m}}$