Integralrechnung

Stefan Rothe

15.08.2026

Inhaltsverzeichnis

1 Unbestimmtes Integral **2**
2 Bestimmtes Integral **6**
3 Flächenberechnungen **8**
4 Fundamentalsatz der Analysis **11**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Unbestimmtes Integral

1.1 Definition und Notation

Stammfunktion. Eine Funktion F ist eine Stammfunktion von f, falls die Ableitung F' mit f übereinstimmt.

$$F \text{ Stammfunktion von } f \qquad \Longleftrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

Beispiel. *Die Funktion $F(x) = x^2 + 5$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$, da $F'(x) = 2x$.*

Da beim Ableiten Konstanten wegfallen, können zu jeder Funktion f unendlich viele Stammfunktionen gefunden werden.

Unbestimmtes Integral. Die Menge aller Stammfunktionen von f wird als unbestimmtes Integral von f bezeichnet und wie folgt geschrieben:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Dabei ist $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von f und C ist eine konstante Zahl, die **Integrationskonstante**.

Beispiel. *Das unbestimmte Integral von $f(x) = 2x$ ist*

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$

Das **Differenzial** $\mathrm{d}x$ gehört mit zur Notation des Integrals. Damit wird festgelegt, nach welcher Variable integriert wird. Das ist insbesondere in der Physik wichtig, wenn mehrere Variablen in einer Funktionsgleichung vorkommen.

Beispiel. *Die Stammfunktion von t^2x ist anders, je nachdem x oder t als Variable betrachtet wird:*

$$\int t^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}t^2x^2 + C \qquad\qquad \int t^2 x\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{6}t^3x + C$$

Die Bedeutung der Notation des Integrals wird im nächsten Kapitel verständlich.

1.2 Integrationsregeln

Das Ermitteln des unbestimmten Integrals kann als Umkehrung des Ableitens aufgefasst werden. Für das Integrieren gibt es ebenfalls Regeln:

Konstante. Das unbestimmte Integral einer Konstante ist gleich der Konstante multipliziert mit der Integrationsvariable.

$$\int a \,\mathrm{d}x = ax + C$$

Beispiel. $\int 5 \,\mathrm{d}x = 5x + C$

Potenz. Das unbestimmte Integral einer Potenz wird bestimmt, indem der Exponent um Eins erhöht wird und die Potenz anschliessend durch den neuen Exponenten dividiert wird:

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

Beispiel. $\int x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2 + C \qquad \int x^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + C$

Konstanter Faktor. Das unbestimmte Integral eines Vielfachen von $f(x)$ ist gleich dem Vielfachen des Integrals von $f(x)$.

$$\int (a \cdot f(x)) \,\mathrm{d}x = a \cdot \int f(x) \,\mathrm{d}x$$

Beispiel. $\int (5x) \,\mathrm{d}x = 5 \cdot \int x \,\mathrm{d}x = 5 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + C = \tfrac{5}{2}x^2 + C$

Summe. Das unbestimmte Integral der Summe von $f(x)$ und $g(x)$ ist gleich der Summe der Integrale von $f(x)$ und $g(x)$.

$$\int (f(x) + g(x)) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

Beispiel. $\int (x + 5) \,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}x + C_1 + \int 5 \,\mathrm{d}x + C_2 = \tfrac{1}{2}x^2 + 5x + C$

Bei diesem Beispiel gibt es zwei Integrationskonstanten C_1 und C_2 von den beiden Integralen. Diese werden anschliessend zu einer Integrationskonstante $C = C_1 + C_2$ zusammengefasst.

1.3 Stammfunktion bestimmen

Wenn von einer Stammfunktion zusätzliche Informationen bekannt sind, kann diese genau bestimmt werden. Beispielsweise kann ein Punkt auf dem Graphen der Stammfunktion gegeben sein. In diesem Fall kann durch Einsetzen der Koordinaten des Punkts in die Funktionsgleichung die Integrationskonstante C ermittelt werden.

Beispiel. *Der Graph der Stammfunktion von $f(x) = 4x$ verläuft durch den Punkt $P(2/5)$.*

Das unbestimmte Integral von $f(x)$ lautet

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 4x\,\mathrm{d}x = 2x^2 + C$$

Nun werden die Koordinaten von P in die Gleichung eingesetzt:

$$\begin{array}{rl|l} F(x) = 2x^2 + C & & P(2/5) \\ 5 = 2 \cdot 2^2 + C & & \textit{ausrechnen} \\ 5 = 8 + C & & -8 \\ -3 = C & & \end{array}$$

Somit lautet die gesuchte Stammfunktion $F(x) = 2x^2 - 3$.

1.4 Anwendung: Geradlinige Bewegung

Eine wichtige Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung sind die Bewegungsgleichungen in der Physik.

Eine geradlinige Bewegung wird beschrieben, indem die Wegkoordinate s in Abhängigkeit der Zeit t beschrieben wird. Mathematisch gesehen ist die Wegkoordinate $s(t)$ eine Funktion mit der Zeit t als Variable.

Die Physik definiert die **Geschwindigkeit** v (engl. *velocity*) als die Veränderung des Orts pro Zeiteinheit. Die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ ist also

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Mit Hilfe der Differenzialrechnung kann die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ als Ableitung der Wegfunktion $s(t)$ definiert werden:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = s'(t)$$

Die **Beschleunigung** a (engl. *acceleration*) wird in der Physik als die Veränderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit definiert. Die mittlere Beschleunigung $\overline{a}$ ist

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Mit der Differenzialrechnung kann gezeigt werden, dass die momentane Beschleunigung $a(t)$ die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und somit die zweite Ableitung der Wegfunktion $s(t)$ ist:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = v'(t) = s''(t)$$

Zusammenfassend kann die gradlinige Bewegung mit folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$$v(t) = s'(t) \qquad\qquad a(t) = v'(t)$$

Mit der Integralrechnung können diese Beziehungen nun umgekehrt ausgedrückt werden:

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t \qquad\qquad v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$$

Nun kann die Frage gestellt werden, wie die Wegfunktion einer gleichmässig beschleunigten Bewegung aussieht. Dazu wird zunächst die Beschleunigungsfunktion für die konstante Beschleunigung a_0 aufgeschrieben:

$$a(t) = a_0$$

Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ kann nun als unbestimmtes Integral der Beschleunigungsfunktion ausgedrückt werden.

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int a_0\,\mathrm{d}t = a_0 t + C = a_0 t + v_0 = v_0 + a_0 t$$

Die Integrationskonstante C stellt dabei die Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ dar.

Nun wird die Wegfunktion $s(t)$ als unbestimmtes Integral der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ ausgedrückt:

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (v_0 + a_0 t)\,\mathrm{d}t = v_0 t + \tfrac{1}{2} a_0 t^2 + C = v_0 t + \tfrac{1}{2} a_0 t^2 + s_0$$

Hier stellt die Integrationskonstante C die Anfangsposition s_0 der Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0$ dar.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass mit Hilfe der Integralrechnung ausgehend von der Bedingung der konstanten Beschleunigung die Gleichungen der gradlinigen Bewegung hergeleitet werden konnten:

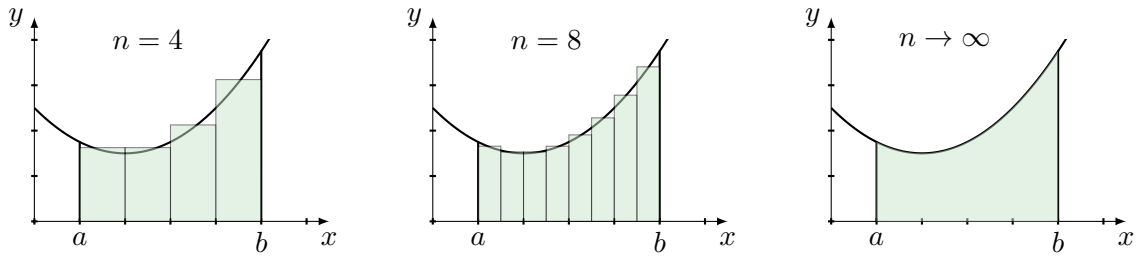
$$a(t) = a_0 \qquad v(t) = v_0 + a_0 t \qquad s(t) = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_0 t^2$$

2 Bestimmtes Integral

2.1 Definition

Der Inhalt einer Fläche, die durch eine Kurve begrenzt wird, kann bisher nicht genau berechnet werden. Im folgenden wird gezeigt, wie dies mit der Integralrechnung möglich ist.

Das Ziel ist es, die Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse auf einem bestimmten Intervall $[a, b]$ zu ermitteln. Dazu wird das Intervall in n Teilstücke unterteilt. Jedes Teilstück hat somit die Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.



Als Näherung der gesamten Fläche werden die Flächeninhalte alle rechteckigen Streifen summiert, welche die Breite h haben und in der Höhe durch den Graphen begrenzt sind.

$$A_n = \Delta x \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \Delta x - \tfrac{1}{2} \cdot \Delta x\right) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \tfrac{b-a}{n} - \tfrac{b-a}{2n}\right)$$

Je grösser n wird, desto genauer wird die gesuchte Fläche durch A_n angenähert. Anders ausgedrückt bilden die Flächen A_n eine Folge, deren Grenzwert der tatsächlichen Grösse der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse entspricht.

Bestimmtes Integral. Der Flächeninhalt A zwischen dem Graphen einer stetigen Funktion $f(x)$ und der x-Achse auf dem Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left(k - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \Delta x\right) \cdot \Delta x\right) \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

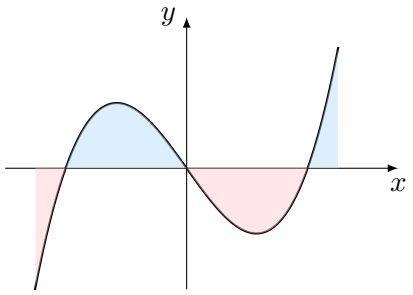
Da innerhalb eines Streifens der Funktionswert unterschiedlich ist, gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Streifen zu bilden. Je nachdem, wie der Funktionswert gewählt wird, heisst die Summe der Streifen anders:

- **Obersumme**, wenn die grössten Funktionswerte gewählt werden,
- **Untersumme**, wenn die kleinsten Funktionswerte gewählt werden,
- **mittlere Summe**, wenn die Funktionswerte in der Mitte des Streifens gewählt werden.

In Lehrmitteln wird häufig mit Ober- und Untersummen gearbeitet, hier werden aus Gründen der Einfachheit mittlere Summen verwendet.

2.2 Orientierung der Summen

Für das bestimmte Integral wird die Breite der Streifen mit dem Funktionswert $f(x)$ multipliziert. Da Funktionswerte negativ sein können, entstehen hier negative Zahlen. Genauer gesagt tragen Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ zur Summe bei, Flächenstücke oberhalb der x-Achse positiv.



Im oben stehenden Beispiel tragen die blau eingefärbten Flächen positiv zur Summe bei, die rot eingefärbten negativ.

3 Flächenberechnungen

3.1 Intervall aufteilen

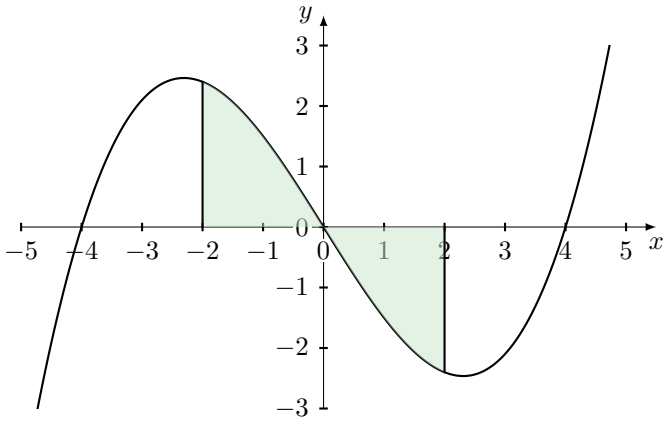
Eine wichtige Anwendung der Integralrechnung ist das Berechnen des Inhalts von Flächen, die durch eine Kurve begrenzt werden. Dabei ist es wichtig, dass alle Flächenstücke positiv zur Gesamtfläche beitragen.

Da das bestimmte Integral orientierte Summen bildet, müssen die Flächenstücke ober- und unterhalb der x-Achse separat berücksichtigt werden. Dazu muss das betrachtete Intervall bei den **Nullstellen** der Funktion aufgeteilt werden.

Fläche zwischen Graph und x-Achse auf Intervall. Um die Fläche zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse zu bestimmen, wird so vorgegangen:

1. Alle Nullstellen von f im Intervall bestimmen.
2. Intervall an diesen Nullstellen aufteilen.
3. Bestimmte Integrale der Teilintervalle berechnen.
4. Die Beträge (positive Werte) der Teilintervalle addieren.

Beispiel. *Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = 0.1x^3 - 1.6x$ und der x-Achse auf dem Intervall $[-2, 2]$ soll berechnet werden.*



Zunächst wird die Stammfunktion F von f bestimmt:

$$F(x) = \int \left(0.1x^3 - 1.6x\right) \mathrm{d}x = 0.025x^4 - 0.8x^2$$

Danach werden benötigte Funktionswerte von F berechnet:

$$F(-2) = F(2) = -2.8 \qquad F(0) = 0$$

Das bestimmte Integral auf dem Intervall $[-2, 2]$ hat den Wert 0 und ist somit offensichtlich nicht der Flächeninhalt der grünen Fläche:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(-2) = -2.8 - (-2.8) = 0$$

Also muss das Intervall bei den Nullstellen der Funktion, welche im Intervall liegen, aufgeteilt werden. Hier ist dies die Nullstelle bei $x = 0$. Ausserdem wird von jeder Teilfläche der Betrag genommen, damit alle Flächenstücke positiv gezählt werden.

$$A = \left| \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = |F(0) - F(-2)| + |F(2) - F(0)|$$
$$= |0 - (-2.8)| + |-2.8 - 0| = |2.8| + |-2.8| = 2.8 + 2.8 = 5.6$$

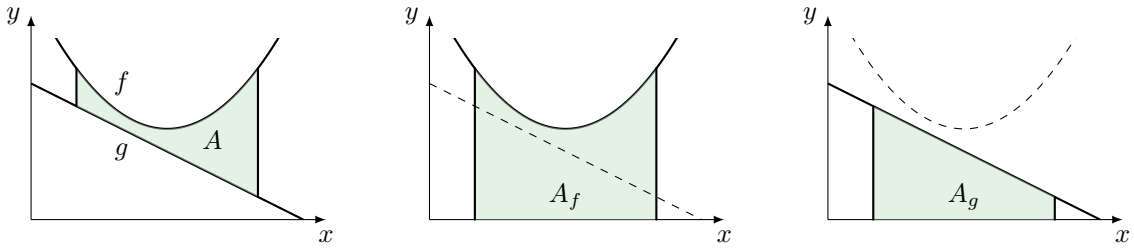
Der Flächeninhalt beträgt also 5.6.

3.2 Fläche zwischen Graph und x-Achse

Anstatt die Fläche auf einem Intervall zu berechnen, kann nach der **gesamten** Fläche gefragt werden, welche der Graph einer Funktion mit der x-Achse einschliesst. Die entsprechenden Teilintervalle werden durch die Nullstellen der Funktion vorgegeben.

3.3 Fläche zwischen zwei Graphen

Eine naheliegende Lösung, um die Fläche A zwischen zwei Funktionsgraphen f und g zu berechnen, ist es, die Flächen zwischen den einzelnen Graphen und der x-Achse zu berechnen und diese Flächen zu subtrahieren: $A = A_f - A_g$.



Die Fläche zwischen den Graphen kann jedoch auch als Grenzwert von vertikalen Streifen ausgedrückt werden. Die Höhe von jedem Streifen beträgt $g(x) - f(x)$.

Die Fläche kann also einfach durch das Integral der Differenz der beiden Funktionen ausgedrückt werden.

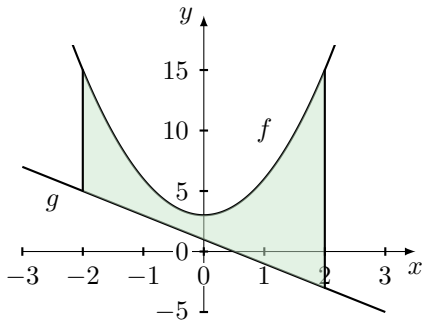
Flächenbilanz zwischen zwei Graphen. Die Flächenbilanz A zwischen den Graphen der Funktionen f und g auf dem Intervall $[a, b]$ beträgt

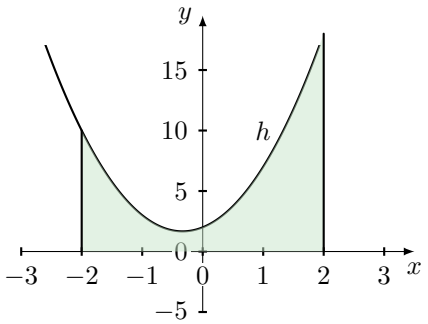
$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

Achtung: Hier wird die Flächenbilanz berechnet. Um den geometrischen Flächeninhalt zu erhalten, muss das Integral wie oben beschrieben an den Nullstellen von $f(x) - g(x)$ aufgeteilt werden.

Beispiel. *Die Fläche zwischen den Graphen der beiden Funktionen f und g auf dem Intervall $[-2, 2]$ soll berechnet werden.*

$f(x) = 3x^2 + 3$ $g(x) = -2x + 1$





Dazu wird zunächst die Differenz der beiden Funktionen gebildet:

$$h(x) = g(x) - f(x) = 3x^2 + 3 - (-2x + 1) = 3x^2 + 2x + 2$$

Nun werden die Nullstellen von h bestimmt.

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8$$

Da die Diskriminante D negativ ist, hat die Funktion h keine Nullstellen. Also muss das Intervall nicht aufgeteilt werden.

Nun wird die Stammfunktion von h bestimmt:

$$H(x) = x^3 + x^2 + 2x$$

Die Werte der Stammfunktion an den Intervallenden werden berechnet:

$$H(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = -8 - 4 - 4 = -16$$
$$H(2) = 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 - 4 + 2 = 6$$

Nun kann die Fläche mit dem Integral von h berechnet werden:

$$A = \int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = |H(2) - H(-2)| = |-16 - 6| = |-22| = 22$$

4 Fundamentalsatz der Analysis

Der Fundamentalsatz der Analysis, auch bekannt als Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung, stellt den Zusammenhang her zwischen dem bestimmten Integral, welches die Fläche unter einem Funktionsgraphen als Grenzwert definiert und dem unbestimmten Integral, welches das Integrieren als Umkehrung des Ableitens definiert.

4.1 Integralfunktion

So wie der Differenzialquotient die Steigung eines Graphen an einer bestimmten Stelle berechnet, ermittelt das bestimmte Integral die Fläche unter dem Graphen auf einem bestimmten Interval.

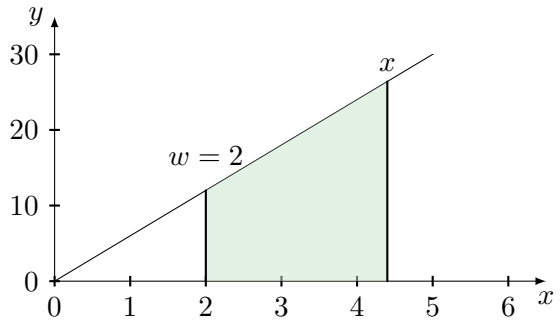
Deshalb muss zunächst über dem bestimmten Integral eine Funktion konstruiert werden. Dies geschieht, indem zunächst der Anfang des Intervalls a fix gewählt wird.

Nun wird die Integralfunktion für eine Konstante w wie folgt definiert: Der Wert der Integralfunktion I_w an der Stelle x entspricht der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[w, x]$:

$$I_w(x) = \int_w^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Da der Anfang des Intervalls beliebig gewählt werden kann, können beliebig viele Integralfunktionen I_w zu einer Funktion f definiert werden. Diese unterscheiden sich jedoch nur durch einen konstanten Faktor.

Beispiel. *Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6x$ und es wird die Konstante $w = 2$ gewählt. Dann ist I_2 die Funktion welche den Inhalt der abgebildeten, farbigen Fläche auf dem Intervall $[2, x]$ berechnet.*



Da der Graph von f eine Gerade ist, kann die Integralfunktion geometrisch berechnet werden. Dazu von der Fläche des Dreiecks mit der Grundseite x die Fläche des Dreiecks mit der Grundseite 2 subtrahiert:

$$I_2(x) = \int_2^x f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) - \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot f(2) = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot 6x - \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 = 3x^2 - 24$$

Dabei fällt auf, dass die Integralfunktion $I_2(x) = 3x^2 - 24$ eine Stammfunktion von f ist.

4.2 Integralfunktionen sind Stammfunktionen

Es ist kein Zufall, dass eine Integralfunktion von f auch eine Stammfunktion von f ist. Der erste Teil des Fundamentalsatzes der Analysis besagt nämlich, dass jede Integralfunktion auch eine Stammfunktion ist.

Fundamentalsatz, erster Teil. Ist f eine Funktion, welche auf dem Intervall $[a, b]$ stetig ist, dann ist die Integralfunktion I_w von f differenzierbar und eine Stammfunktion von f.

$$I_w(x) = \int_w^x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Longrightarrow \qquad I_w'(x) = f(x)$$

Die Wahl einer Stelle w der Integralfunktion entspricht der Wahl einer Integrationskonstante c bei der Stammfunktion. Dabei ist zu beachten, dass die beiden Konstanten nicht die gleiche Bedeutung haben und für die gleiche Funktion unterschiedlich sind.

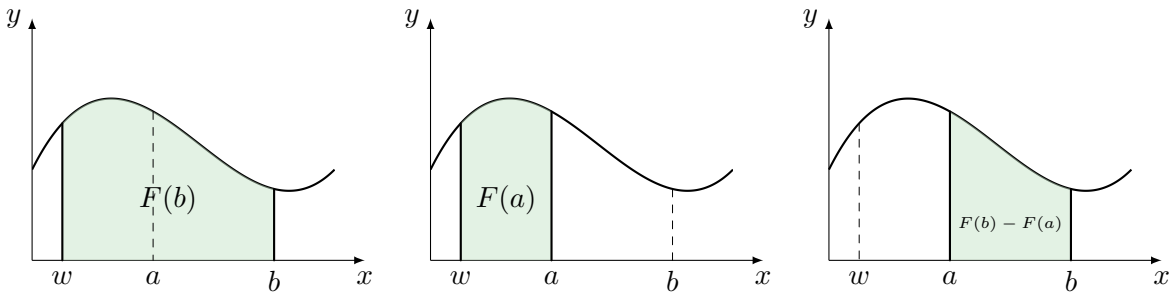
Beispiel. *$I_2(x) = 3x^2 - 24$ ist die Integralfunktion von $f(x) = 6x$ beginnend bei $w = 2$ aus dem vorherigen Beispiel. Es ist eine Stammfunktion von f:*

$$I_2'(x) = \left(3x^2 - 24\right)' = 2 \cdot 3x = 6x = f(x)$$

4.3 Flächenberechnung mit Stammfunktionen

Zu der Funktion f wird eine beliebige Stammfunktion F gewählt. Gemäss dem ersten Teil des Fundamentalsatzes ist F eine Integralfunktion I_w von f für eine bestimmte Stelle w.

Also ist $F(b)$ die Fläche auf dem Intervall $[w, b]$ und $F(a)$ ist die Fläche auf dem Intervall $[w, a]$ unter dem Graphen von f.



Die Differenz dieser beiden Flächen ist die Fläche unter dem Graphen von f auf dem Intervall $[a, b]$. Dies ist die Aussage des zweiten Teils des Fundamentalsatzes.

Fundamentalsatz, zweiter Teil. Ist f eine Funktion, welche auf dem Intervall $[a, b]$ stetig ist und ist F eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$