Zufallsexperimente

1. **Zufallsexperiment.** Welche der folgenden Aktionen ergeben zufällige Ergebnisse? Welches sind die möglichen Ergebnisse? Sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich?

   (a) Eine Münze wird geworfen und die oben liegende Seite ermittelt.

   Lösung: Die Ergebnisse sind zufällig. Folgende Ergebnisse sind möglich:

   $$\Omega = \{\text{Kopf}; \text{Zahl}\}$$

   Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich.

   (b) Eine unbekannte Person wird nach dem Wochentag ihres Geburtstags gefragt.

   Lösung: Die Ergebnisse sind zufällig. Folgende Ergebnisse sind möglich:

   $$\Omega = \{\text{Mo}; \text{Di}; \text{Mi}; \text{Do}; \text{Fr}; \text{Sa}; \text{So}\}$$

   Alle Ereignisse sind gleich wahrscheinlich.

   (c) Der Wochentag des 25. Septembers 1974 wird ermittelt.

   Lösung: Das Ergebnis ist nicht zufällig, es war ein Mittwoch.

   (d) Die Höhe eines Pults im Schulzimmer wird gemessen.

   Lösung: Die genauen Ergebnisse sind zufällig, aber nicht gleich wahrscheinlich.

   (e) Ein Buch wird an einer beliebigen Stelle aufgeschlagen und der erste Buchstabe auf der Seite wird ermittelt.

   Lösung: Die Ergebnisse sind zufällig. Folgende Ergebnisse sind möglich:

   $$\Omega = \{\text{A}; \text{B}; \text{C}; \ldots; \text{Z}\}$$

   Je nach Sprache gibt es noch weitere Buchstaben (z.B. «Ä»).

   Die Ergebnisse sind nicht gleich wahrscheinlich, da manche Buchstaben häufiger vorkommen als andere.

   (f) Der erste Buchstabe auf Seite 40 im Fundamentum wird ermittelt.

   Lösung: Das Ergebnis ist nicht zufällig, es ist ein «K».

2. **Münzen.** Zwei verschiedene Münzen werden geworfen, jede kann entweder Kopf oder Zahl anzeigen. Wie lautet der Ergebnisraum?

Lösung:

$$\Omega = \{\text{kk}, \text{kz}, \text{zk}, \text{zz}\}$$

3. **Farben.** Aus den vier Farben Rot, Gelb, Blau und Schwarz werden zwei zufällig ausgewählt.

   (a) Aus welchen Ereignissen besteht der Ergebnisraum?

   Lösung: Es gibt sechs Möglichkeiten, zwei Farben auszuwählen:

   $$\Omega = \{\text{rg}; \text{rb}; \text{rs}; \text{gb gs}; \text{bs}\} \qquad |\Omega| = 6$$

   (b) Aus welchen Ergebnissen besteht das Ereignis A : «die Farbe Rot wurde gewählt»?

   Lösung: In der der vier Ergebnissen kommt die Farbe Rot vor:

   $$A = \{\text{rg}; \text{rb}; \text{rs}\} \qquad |A| = 3$$

4. **Bücher.** Für die Maturlektüre dürfen Sie aus fünf Werken von Bachmann, Funke, Hacker, Mahlke und Wolff drei auswählen.

   (a) Welche und wie viele Möglichkeiten haben Sie?

   Lösung:

   $$\Omega = \{\text{bfh}; \text{bfm}; \text{bfw}; \text{bhm}; \text{bhw}; \text{bmw}; \text{fhm}; \text{fhw}; \text{fmw}; \text{hmw}\} \qquad |\Omega| = 10$$

   (b) Aus welche und wie vielen Ergebnissen besteht das Ereignis A : «Das Werk von Mahlke wurde gewählt»?

   Lösung:

   $$A = \{\text{bfm}; \text{bhm}; \text{bmw}; \text{fhm}; \text{fmw}; \text{hmw}\} \qquad |A| = 6$$

5. **Würfel.** Sie würfeln mit zwei Spielwürfeln.

   (a) Aus wie vielen Ereignissen besteht der Ergebnisraum?

   Lösung: Beide Würfel können sechs unterschiedliche Augenzahlen anzeigen.

   $$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 6^2 = 36$$

   (b) Aus welchen und wie vielen Ergebnissen besteht das Ereignis A : «Die Summe der Augenzahlen beträgt Zehn»?

Lösung: Das Ereignis A besteht aus den folgenden Ergebnissen:

$A = \{$⚅⚅; ⚄⚄; ⚃⚃$\}$ $|A| = 3$

6. **Zahlenschloss.** Bei einem Zahlenschloss können Kombinationen aus fünf Ziffern von Null bis Neun gebildet werden.

   (a) Wie viele unterschiedliche Einstellungen sind möglich?

   Lösung: An jeder Stelle des Zahlenschlosses kann eine von zehn Ziffern ausgewählt werden. Es handelt sich also um eine geordnete Auswahl mit Wiederholung.

   $$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 = 100'000$$

   (b) Wie viele Einstellungen sind möglich, wenn jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf?

   Lösung: Nun handelt es sich um eine geordnete Auswahl ohne Wiederholung mit $n = 10$ und $k = 5$.

   $$\frac{10!}{(10-5)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30'240$$

   Anschauliche Interpretation: Für die erste Stelle kann aus zehn Ziffern ausgewählt werden, für die zweite Stelle nur noch aus neun usw.

   (c) Wie viele Einstellungen sind möglich, wenn die erste Ziffer eine Vier ist und jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf?

   Lösung: Da eine Ziffer vorgegeben ist, werden noch vier Ziffern aus Neun ausgewählt, wiederum geordnet und ohne Wiederholung. Also ist $n = 9$ und $k = 4$.

   $$\frac{9!}{(9-4)!} = 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

   Anschauliche Interpretation: Für die erste Ziffer gibt es nur eine Möglichkeit, die Vier. Für die restlichen Ziffern gilt die gleiche Überlegung wie bei der vorangehenden Aufgabe.

7. **Schulklasse.** Aus einer Schulklasse mit 18 Schüler:innen soll eine Delegation von drei Personen ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

   Lösung: Hier handelt es sich um eine ungeordnete Auswahl ohne Wiederholung mit $n = 18$ und $k = 3$. Ungeordnet, da die Reihenfolge der Personen in der Delegation keine Rolle spielt. Ohne Wiederholung, da nicht eine Personen mehrfach in die Delegation gewählt werden kann.

   $$\frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{18}{3} = 816$$

8. **Schulzimmer.** 23 Schüler:innen einer Schulklasse verteilen sich auf 26 Pulte in einem Schulzimmer. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es?

Lösung: Es handelt sich um eine geordnete Auswahl ohne Wiederholung mit $n = 26$ und $k = 23$. Geordnet, da es für die Sitzordnung eine Rolle spielt, wer ein bestimmtes Pult auswählt. Ohne Wiederholung, da ein Pult nur einmal ausgewählt werden kann.

$$\frac{26!}{(26-23)!} = 6.722 \cdot 10^{25}$$

9. **Spielzeuge.** Wie viele Möglichkeiten gibt es, sieben Spielzeuge auf drei Kinder aufzuteilen, wenn das jüngste drei Spielzeuge erhält und die andern je zwei?

Lösung: Es handelt sich um eine **mehrfache** ungeordnete Auswahl ohne Wiederholung. Ungeordnet, da es für ein Kind Rolle spielt, in welcher Reihenfolge es die Spielzeuge erhält und ohne Wiederholung, da jedes Spielzeug nur einmal ausgewählt werden kann.

Hier wählt zuerst das kleinste Kind drei Spielzeuge aus sieben aus. Dann wählt das zweite Kind zwei Spielzeuge aus den verbleibenden vier aus. Das letzte Kind wählt aus den letzten zwei Spielzeugen zwei aus (was nur auf eine Art möglich ist).

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 35 \cdot 6 \cdot 1 = 210$$

10. **Münze.** Eine Münze wird 30-mal geworfen und es erscheint 18-mal Kopf. Auf wie viele unterschiedliche Arten ist dies möglich?

Lösung: Die 30 Münzwürfe werden durchnummeriert. Aus den Zahlen 1 bis 30 werden die 18 Nummern der Würfe gezogen, bei welchen Kopf erscheint. Es handelt sich also um eine ungeordnete Auswahl ohne Wiederholung mit $n = 30$ und $k = 18$. Ungeordnet, da es keine Rolle spielt, wann die Nummer eines bestimmten Wurfs gezogen wird. Ohne Wiederholung, da jeder Wurf nur einmal gezogen werden kann.

$$\binom{30}{18} = 86'493'225$$

11. **Parkplatz.** Diese Aufgabe ist gestrichen.

12. **Sitzordnung.** Wie viele Sitzordnungen gibt es, wenn sich sieben Personen auf sieben Stühle verteilen,

(a) wenn die Stühle nebeneinander in einer Reihe stehen?

Lösung: Es handelt sich um eine geordnete Auswahl ohne Wiederholung mit $n = 7$ und $k = 7$. Geordnet, da es eine Rolle spielt, wer auf einem bestimmten Stuhl sitzt. Ohne Wiederholung, da auf jedem Stuhl nur eine Person sitzen kann.

$$\frac{7!}{(7-7)!} = \frac{7!}{0!} = 7! = 5040$$

(b) wenn die Stühle um einen runden Tisch angeordnet sind?

Lösung: Gemäss Besprechung im Unterricht:

$$\frac{7!}{7} = 6! = 720$$

13. Jasskarten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 36 Jasskarten an vier Personen zu verteilen, sodass jede Person neun Karten erhält?

Lösung: Es handelt sich um eine **mehrfache** ungeordnete Auswahl ohne Wiederholung. Ungeordnet, da es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge jemand die Karten erhält. Ohne Wiederholung, da jede Karte nur einmal verteilt werden kann.

Zuerst erhält die erste Person neun aus 36 Karten. Dann erhält die zweite Person neun aus den verbleibenden 27 Karten, usw.

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} = 2.1452 \cdot 10^{19}$$

14. Tichukarten. Tichu wird mit 56 Karten gespielt. Am Anfang erhält jede Person 14 Karten auf die Hand. Wie viele unterschiedliche Tichu-Anfangshände sind möglich?

Lösung: Es handelt sich um eine ungeordnete Auswahl ohne Wiederholung mit $n = 56$ und $k = 14$. Ungeordnet, da es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge eine Person die Karten erhält. Ohne Wiederholung, da jede Karte nur einmal verteilt werden kann.

Im Gegensatz zur Aufgabe «Jasskarten» werden hier nur die Handkarten einer Person betrachtet. Es handelt sich also nicht um einem mehrfache Auswahl.

$$\binom{56}{14} = 5.8047 \cdot 10^{12}$$

15. Dominosteine. Wie viele unterschiedliche Dominosteine mit Augenzahlen von Null bis Sechs gibt es?

Lösung: Zunächst werden die Anzahl Möglichkeiten gezählt, Dominosteine mit zwei unterschiedlichen Augenzahlen zu bilden. Dies ist eine ungeordnete Auswahl ohne Wiederholung mit $n = 7$ und $k = 2$.

Zusätzlich müssen noch die sieben Dominosteine gezählt werden, welche zweimal die gleiche Augenzahl aufweisen.

$$\binom{7}{2} + 7 = 21 + 7 = 28$$